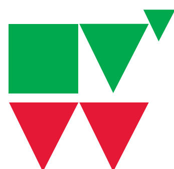
EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

EXITKAARTEN
KANGOEROEKAMP 2014
COMBINATORIEK: MEER DAN TRUCJES
HET FIZIER GERICHT OP...
GELIJKE MONNIKEN, GELIJKE KAPPEN
UITDAGENDE PROBLEMEN

NR.3



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 90 | DECEMBER 2014

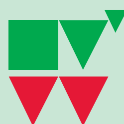
INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 90 NR 3

IN DIT NUMMER

De coverafbeelding is van Rinus Roelofs: De vervlochten structuur blijkt toch maar uit één doorlopend vlak te bestaan. Website *www.rinusroelofs.nl*

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Kort vooraf

Terwijl ik dit stukje schrijf, ligt er links van me een grote stapel toetsen. Het ene nakijkwerk is nog niet weg of het volgende ligt alweer op mijn bureau. Ook het opstellen van een goede toets kost me nog steeds hoofdbrekens. Want ik ben wel zoveel weken met leerlingen aan de slag om een onderwerp echt goed onder de knie te krijgen, maar hoe weet ik zeker dat mijn toets enig inzicht geeft in hun kennis en vaardigheden? En wat zegt die 5,5 of 8 die een leerling haalt dan werkelijk?
Voor een frisse blik op de zaak begaf ik me een aantal weken geleden naar een congres over... toetsen! Het hielp niet direct om de dagelijkse sores op te lossen, maar het was goed om eens op macroniveau te kijken naar de manier waarop wij in het onderwijs proberen om inzicht te krijgen in het leerproces. Daar viel veel te halen, maar niet alles was direct bruikbaar. Wel kon ik me vinden in de boodschap dat er meer formatief getoetst zou moeten worden, en wel zodanig dat een leerling direct feedback krijgt.
En dan bof je met een neventaak als hoofdredacteur. Want rond die tijd plofte het artikel van Miek Scheffers in mijn mailbox. Ik was meteen geïnspireerd en inmiddels is de exitkaart een vast onderdeel van mijn lessen.
En dan nog even terug naar die summatieve toetsen die op mijn bureau liggen. Over een paar maanden liggen op die plek de centrale eindexamens van mijn leerlingen. Het goed nakijken daarvan kost ook weer hoofdbrekens. Ab van der Roest schrijft daar verderop heel herkenbaar over. En ik ben dan ook blij met het initiatief van het Cito en CvTE om in dit nummer aandacht te besteden aan de normering van deze toetsen.

De redactie wenst u veel leesplezier en een fijne kerstvakantie,

Marjanne de Nijs

EXITKAARTEN

Miek Scheffers-Sap

WAT HEBBEN ZE GELEERD, WELK KWARTJE IS GEVALLEN?

Bereiken leerlingen de leerdoelen die de docent gesteld heeft? Veel informatie voor het inrichten van de volgende les kan verzameld worden met behulp van exitkaarten. Wiskundedocenten die deelnamen aan de cursus 'Aandacht voor excellentie in de bètavakken' aan de TU Eindhoven, hebben kennisgemaakt met de exitkaart en deze toegepast in hun onderwijs.

Docenten maken veel gebruik van formatieve toetsing: vragen stellen in de les, een klassengesprek aangaan, diagnostische toetsen gebruiken, gerichte mondelinge/schriftelijke feedback aan leerlingen geven, etcetera. Summatieve toetsen leveren altijd een cijfer op; formatieve toetsen niet. In tegenstelling tot het leerresultaat achteraf toetsen (summatief), worden bij formatief toetsen de leerresultaten tijdens het leerproces verzameld. Ze dienen immers niet om leerlingen te beoordelen, maar geven de docenten en leerlingen informatie met behulp waarvan ze het leerproces goed op de behoeften kunnen afstemmen. Of zoals Carol Ann Tomlinson[1] het uitdrukt: 'Formatieve toetsing helpt leerlingen groeien, meer dan het catalogiseren van hun fouten'.

Exitkaarten

Een exitkaart (Engels: *exit card*, *exit slip*, *one minute paper*)[2], [3] kan ook gebruikt worden als instrument voor formatieve toetsing.[4] Een leuk voorbeeld van het gebruik door Marie Barci tijdens haar wiskundelessen staat op *Teaching Channel*.[5] De exitkaart heeft vaak de vorm van een kleine papieren kaart met vragen, zie figuur 1. De leerlingen krijgen de kaart kort voor het einde van de les, beantwoorden de vragen op de kaart en leveren hem in bij het verlaten van het lokaal. Belangrijk is dat het invullen van de kaart niet meer dan een paar minuten in beslag neemt. De docent evalueert aan de hand van ingeleverde exitkaarten. Zoals Thijs, een van de deelnemers aan de cursus[6] aangeeft: 'Je ziet iets van elke leerling. Met een klassengesprek krijg ik niet zoveel informatie boven tafel. Met de uitkomsten richtte ik mijn volgende les weer in.' Een andere mogelijkheid is het gebruiken van meerdere kaarten die in niveau verschillen. Thijs: 'Doordat ik verschillende niveaus vragen gebruikte bij de kaarten, hadden alle leerlingen het gevoel dat ze de leerdoelen snapten. Zo schepte het voor de zwakkere leerlingen vertrouwen en konden de betere leerlingen laten zien

Exit card	Naam: ______________________
Hoe moet je de grafiek van $f(x) = x^2$ verschuiven om de grafiek van $g(x) = (x-2)^2 + 4$ te krijgen?	
Hoe moet je de grafiek van $h(x) = -2x^2$ verschuiven om de grafiek van $k(x) = -2(x+1)^2 - 4$ te krijgen?	
Hoe moet je de grafiek van $p(x) = 6x^2$ verschuiven om de grafiek van $q(x) = 6(x-4)^2 - 2$ te krijgen?	

figuur 1 Exitkaart met conceptvragen

wat ze echt in hun mars hadden'. Volgens Ellen geeft het gebruik van de kaarten goede extra informatie naast je eigen inzichten. Maaike en Thijs benadrukken dat je in heel korte tijd een goed overzicht krijgt van het niveau van de leerlingen, dat je meteen merkt welk kwartje wel of niet gevallen is. De informatie die de exitkaarten opleverden, is voor hen een handvat om de volgende les in te richten, eventueel om te differentiëren. Thijs merkt op: 'Ik merk, nu ik ze vaker gebruik, dat ik zelf groei in het toepassen van het juiste niveau en de moeilijkheidsgraad en de benodigde tijd beter inschat.'

'OOK VOOR DE LEERLINGEN WORDT HET HELDER WAAR ZE OP DAT MOMENT STAAN'

Leerlingen

Ook voor de leerlingen wordt het helder waar ze op dat moment staan. Leerlingen gaven volgens de docenten aan dat ze het fijn vonden werken, omdat ze nu eigenlijk meteen wisten of ze iets goed begrepen. Sommige leerlingen zagen de opdracht met de exitkaarten ook als een soort samenvatting van de behandelde leerstof. Maaike werd door een leerling verrast met de vraag 'mag ik de exitkaart al maken, ik denk dat ik al weet waar de exitkaart over zal gaan'. Ook blijkt dat de leerlingen geconcentreerd aan het werk blijven. 'Weet je wat ook zo fijn is van de exitkaarten, de leerlingen zijn tot het laatste moment in de les bezig en pakken niet al ruim voor tijd hun tas in.'



figuur 2 Exitkaart met conceptvraag

In de klas

Uiteraard hoeft de exitkaart niet op papier. Als de school het gebruik van mobiele telefoons, iPads of andere tablets toestaat kunnen deze ingezet worden voor digitale hulpmiddelen zoals *Socrative* of *Kahoot*, Google Formulieren of *polleverywhere*.[7] Of leerlingen sturen een *tweet*, zetten een *blog* op of gebruiken *Pinterest* (een sociale netwerksite die fungeert als prikbord).[8]
Joris (docent natuurkunde) heeft via *Socrative* zes à zeven meerkeuzevragen ingezet aan het einde van een les, waarbij de leerlingen via hun telefoon de antwoorden gaven. Belangrijk is wel dat de leerlingen weten wat het doel van de exitkaarten is. Vertel hen dat je wilt weten hoe goed ze begrijpen wat is uitgelegd, of dat je de problemen wilt achterhalen die er (nog) zijn, zodat je ze verder kunt helpen.

De vragen op de exitkaart

De vragen of opdrachten kunnen ingaan op de concepten van een les, of een zelfanalyse van de leerling zijn op het eigen leerproces, zie figuur 3. Voor de docent is het belangrijk voor zichzelf de leerdoelen scherp te hebben geformuleerd om zo tot goede vragen voor de exitkaart te komen. Thijs vertelt: 'Ik ben begonnen met de leerdoelen ook in de studiewijzers voor de leerlingen te formuleren, dit helpt dan ook om ze beter zichtbaar te maken in de exitkaarten '. Maaike is het met hem eens; zij heeft gemerkt dat zij die leerdoelen ook zelf heel scherp voor de geest moet hebben, maar dat het haar ook helpt nog bewuster keuzes te maken in de opgaven die zij leerlingen laat maken. Vragen die ook wel in summatieve toetsen worden toegepast, zoals meerkeuzevragen, meer-antwoordenvragen, goed/fout-oneens/eens-ja/nee vragen, ordeningsvragen, matchingsvragen of open opgaven kunnen gebruikt worden bij de exitkaarten.
In dit artikel zijn een paar voorbeelden van exitkaarten met conceptvragen voor wiskunde opgenomen (figuur 1 en 2).

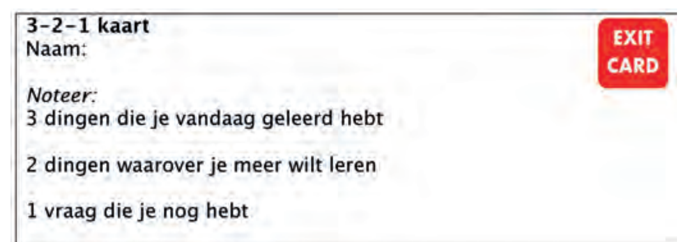
Andere typen vragen worden gebruikt om een indruk te krijgen van het leerproces van de leerlingen (figuur 3 en 4).
Volgens Fisher en Frey[9] zijn er drie typen vragen (figuur 4) te onderscheiden:

- vragen die het leren documenteren;
- vragen die het leerproces benadrukken;
- vragen die de effectiviteit van de instructie evalueren.

Voor leerlingen is het belangrijk te weten dat er geen foute antwoorden op deze vragen zijn. Het blijkt wel dat wanneer de eerste keer dit type kaart gebruikt wordt, de leerlingen er moeite mee hebben, maar volgens de docenten wennen ze er aan.

Tips

Op de vraag of de inzet van exitkaarten extra/veel werk oplevert, geven de docenten aan: 'Het kost wel tijd, maar het levert mij en de leerling zoveel inzicht op waar je mee verder kunt.' 'Op zich kost het maken van de kaarten niet veel tijd, maar je wilt daarna ook anders aan de slag in je lessen. Materialen daarvoor zoeken/maken kost ook tijd. Maar ik merk ook dat de sfeer in de klas er ook veel positiever door wordt en dat is de inspanning waard.'
Maaike is ook aan de slag gegaan met entreekaarten (boardingkaarten) aan het begin van een les.



figuur 3 Exitkaart t.b.v. leerproces



figuur 4 Exitkaart t.b.v. leerproces

Als bron voor conceptvragen gebruikten de docenten opgaven uit het boek of uit boeken van een andere methode. Zo gaf Maaike een opgave minder als huiswerk op omdat die juist heel erg geschikt was om te gebruiken op de exitkaart. Het aantal keren dat de docenten[10] de exitkaart hebben ingezet in lessen verschilt. Het varieert van elke week door Geertje tot een of twee keer tijdens een hoofdstuk zoals Thijs en Ellen. Anderen geven aan dat ze gaan voor structureel, maar wel functioneel, inzetten. Het moet een middel blijven en geen doel worden. Afsluitend geven de docenten het advies 'gewoon ermee gaan experimenteren' en 'gewoon doen'.

Noten

[1] Valk, T. van der (2014). Excellentie en Differentiatie, *www.schoolaanzet.nl/uploads/tx_sazcontent/Excellentie_en_Differentiatie_-_webversie.pdf*

[2] Stead, D. (2005). A review of the one minute paper, *Active learning in higher education*, *6*, 118-131.

[3] *www.ascd.org/publications/educational-leadership/oct12/vol70/num02/The-Many-Uses-of-Exit-Slips.aspx*

[4] Berg, E. van den (2014). Formatieve toetsing en feedback tijdens de les, *NVOX, 39*(5), 225-227.

[5] *www.teachingchannel.org/videos/student-daily-assessment*

[6] Cursus 'Aandacht voor excellentie in de bètavakken 2014-2015': *www.scheikunde.nl/cursusbetaexcellent*

[7] *www.socrative.com/*; *www.getkahoot.com*; *www.google.com/google-d-s/createforms.html*;_*http://teachbytes.com/2012/03/21/polleverywhere-and-5-classroom-uses-2/*

[8] *https://nl.pinterest.com/*

[9] Fisher, D., & Frey, N. (2012). *Improving Adolescent Literacy: Strategies at Work.* New Jersey: Pearson Prentice Hall.

[10] Met dank aan de docenten wiskunde Thijs Gillissen, Maaike van der Bruggen, Greetje Smeenk, Ellen Palte, deelnemers van de cursus 2013-2014, voor het delen van hun ervaringen.

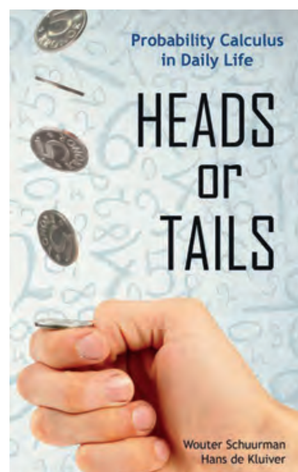
Meer voorbeelden van exitkaarten zijn te vinden op *vakbladeuclides.nl/903scheffers*

Over de auteur

Miek Scheffers-Sap heeft jarenlang als docent scheikunde en natuurkunde gewerkt in het voortgezet onderwijs. Thans is zij bij de TU Eindhoven, Faculteit Scheikundige Technologie, betrokken bij de aansluitingsactiviteiten voor leerlingen en professionaliseringsactiviteiten voor docenten en TOA's. Daarnaast is zij vakdidacticus scheikunde bij de lerarenopleiding van de TU/e (Eindhoven School of Education).
E-mailadres: *m.m.e.scheffers@tue.nl*

VERSCHENEN

HEADS OR TAILS



Ondertitel: Probability Calculus in Daily Life
Auteurs: Wouter Schuurman, Hans de Kluiver
Uitgever: BetaText v.o.f. (2014)
ISBN: 978-90-755-4117-5
Prijs: € 19,99 (180 pagina's; hardcover)

Omschrijving achterkant

At school, you may have found probability theory a boring and useless subject. But its practical applications in daily life are greater than you think. The chance to leave a casino as a wealthy person or finding the best strategy to win a car in a television show greatly increases when you have some notion of probability calculus.

'Heads or Tails' is perfectly suited to improve your skills in using probability theory for the best possible decisions in everyday situations and in games, not based on intuition but on the analysis of facts. Interesting elements of probability calculus are treated in this book, illustrated by numerous puzzles and situations from real life. With this book the authors have tried to achieve two goals: exciting entertainment for puzzle devotees and interesting computational challenges for those involved in statistics.

Dr. Wouter Schuurman and Prof. Dr. Hans de Kluiver are both retired physicists. In their professional lives, they worked in the field of plasma physics.

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*.

Verdacht prachtresultaat

Ferry Haan, promovendus aan de Universiteit van Amsterdam, wilde weten of jongens en meisjes verschillend reageren op het nieuwe wiskundeprogramma (van 2007), waarbij de opgaven waren verpakt in context. Op de testscholen schoten de cijfers van havo-meisjes die wiskunde A volgden plotseling omhoog. Een prachtresultaat? Het leek te mooi om waar te zijn en het bleek ook niet waar. Nader onderzoek leerde dat sinds het nieuwe programma veel minder meisjes wiskunde B kozen dan daarvoor. 'De verbeterde resultaten bij wiskunde A zijn niet het effect van ander onderwijs', concludeert Haan. 'Het lijkt grotendeels te danken aan de meisjes die eigenlijk bij wiskunde B thuishoren. Bang dat wiskunde moeilijker wordt, kozen die meisjes voor de veilige optie', denkt Haan. 'Geen wonder dat de resultaten bij wiskunde A omhoog schoten. Bij de jongens en de meisjes op het vwo zagen we nauwelijks verschil in hun prestaties. De verschuiving van meisjes naar wiskunde A is onze belangrijkste conclusie geworden. Blijkbaar zijn meisjes door deze vernieuwing afgeschrikt om aan wiskunde B te beginnen. Misschien moet er speciale aandacht komen voor meisjes, om hen uit te leggen dat het onderwijs bij veranderingen niet per se moeilijker wordt.' Bron: *Volkskrant*

Succesformules



Wiskundige Lex Schrijver zei eens: 'Wiskunde is als zuurstof. Als het er is, merk je het niet. Als het er niet zou zijn, merk je dat je niet zonder kunt.' Om een klein beetje van de wiskunde die we dagelijks inademen zichtbaar te maken, heeft het Platform Wiskunde Nederland het boek *Succesformules: toepassingen van wiskunde* ontwikkeld. In 36 korte hoofdstukken in een aantrekkelijk vormgegeven boek laten auteurs Bennie Mols en Ionica Smeets zien hoe wiskunde succes boekt op terreinen als economie, geneeskunde, misdaadbestrijding, logistiek, sport en kunst. Daarnaast vertellen acht invloedrijke Nederlanders, waaronder Alexander Rinnooy Kan, Jeroen van der Veer en Louise Gunning over de rol van wiskunde in hun vak en persoonlijke leven. Het boek is met name geschikt om op een laagdrempelige manier de brede toepasbaarheid van wiskunde te laten zien. *Succesformules* telt 108 pagina's en is gratis te downloaden of in print te bestellen via *www.platformwiskunde.nl*.

Kinderen in het speciaal onderwijs rekenen beter

Kinderen in het speciaal basisonderwijs zijn de afgelopen zeven jaar beter gaan rekenen. Het gaat daarbij onder meer om de onderdelen breuken, procenten, meten en verhoudingen. Het niveau van hoofdrekenen is gelijk gebleven met het resultaat van de vorige peiling in 2006. Dat blijkt uit een onderzoek uit 2013, dat nu bekend is gemaakt, naar het reken- en wiskundeniveau in de eindgroep van het speciaal basisonderwijs. De gemiddelde leerling aan het eind van het speciaal basisonderwijs rekent nu op hetzelfde niveau als een leerling aan het eind van groep 5 in het regulier basisonderwijs. Leerlingen in het speciaal basisonderwijs zijn afgelopen jaren wel een half uur per week meer gaan rekenen. Zij doen dat nu net zo veel als kinderen in het regulier basisonderwijs, gemiddeld vijf uur per week. Bron: *ANP*

Stedelijk Gymnasium Nijmegen wint wiskundetoernooi



Met een kleine voorsprong won het team van het Stedelijk Gymnasium Nijmegen het 23e wiskundetoernooi van de Radboud Universiteit. Het team van het Vossius Gymnasium uit Amsterdam legde beslag op de tweede plaats. Deze twee teams mogen nu samen op reis naar Riga. De troostprijs, een stedentrip naar Amsterdam, werd gewonnen door een team van het Waalwijks Willem van Oranje College. In totaal namen 101 teams deel aan het wederom geslaagde wiskundetoernooi, waarbij de teams in de ochtend een aantal uitdagende opgaven moesten zien op te lossen en in de middag een opgave met de nadruk op toepassingen van wiskunde in de maatschappij (dit jaar 3D-printen). Opgaven en uitslag zijn terug te vinden op *www.ru.nl/wiskundetoernooi/wiskundetoernooi*.

Het verhaal van de getallen

Geen vrolijke rekenles, maar echt theater; onder die noemer brengt Maas Theater en Dans een voorstelling voor kinderen vanaf 8 jaar. *Het verhaal van de getallen*, heet de voorstelling, met als ondertitel *snoepgoed voor het brein*. De Maas-productie is subiet door 90 scholen geboekt: een bevestiging van de behoefte aan dit soort originele verpakkingen van bètakennis. De magie van het theater en de magie van wiskunde mogen dan paradoxaal lijken – grenzeloze verbeelding versus concrete meetkunde – in wezen verschillen ze niet zo veel: beide goochelen met modellen van de werkelijkheid. Om begrippen als oneindigheid, het getal nul en het gevangenendilemma goed te verbeelden, riep het toneelgezelschap Maas de hulp in van tekenaar Wouter van Reek, die ooit ook nog eens een jaar wiskunde studeerde. Als op toneel de spelers een discussie voeren over een onderwerp, verschijnen op het bord grappige illustraties. Bron: *Volkskrant*

GETUIGEN

CHARLES DODGSON

Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.





figuur 1 Charles Dodgson

De kinderboeken van Lewis Carroll zijn inmiddels zo vaak herdrukt en verfilmd – het meest recent in de uitbundige 3D *Alice in Wonderland*-film van de hand van Tim Burton – dat iedereen de verhalen kent. Dat Carroll, pseudoniem van Charles Dodgson (1832-1898), naast een populaire auteur, tevens wiskundedocent was aan de universiteit van Oxford, is iets minder bekend. Ook als docent werd hij gewaardeerd, al was hij een enigszins curieuze figuur. Te Oxford waren de docenten wiskunde indertijd – we spreken tweede helft negentiende eeuw – de poortwachters tot vrijwel alle opleidingen. Studenten die in Oxford begonnen, dienden zich in het eerste jaar door de wiskunde-examens (de zogenaamde Tripos) heen te worstelen. De examens waren zwaar en competitief: ze duurden meerdere dagen, en de studenten die het beste scoorden kregen, behalve de prestigieuze 'wrangler'-titel, een studiebeurs. Daarom werkten studenten hard in een poging om zo hoog mogelijk te eindigen. Dat vertaalde zich tevens in nadruk op rekenen en wiskunde in het onderwijs dat naar deze prestigieuze universiteit toeleidde.

Deze aandacht voor wiskunde resulteerde in het ontstaan van een beroepsgroep wetenschappelijk actieve wiskundigen die zich expliciet toelegde op het doen van nieuwe wiskundige vondsten. Dit proces, dat sociologen aanduiden met de term professionaliseringsproces, resulteerde in het stellen van nieuwe maatstaven voor wat goede wiskunde mocht heten; in het stellen van regels aan opleidingen tot wiskundige; het vestigen van nieuwe genootschappen en tijdschriften voor wiskundigen. Bovendien resulteerde het in de uitsluiting van mensen die zich bezig hielden met zaken die niet langer relevant gevonden werden: mensen op zoek naar een oplossing voor het probleem van de cirkelkwadratuur bijvoorbeeld werden niet langer serieus genomen. In dat opzicht was Dodgson een vreemde eend in de bijt: hij bleef zijn leven lang corresponderen met cirkelkwadreerders. Hij was dan ook wiskundedocent tegen wil en dank: liever was hij met zijn Letteren-opleiding een andere carrière tegemoetgegaan. Zijn kwaliteiten als wiskundedocent – en zijn prestaties bij de Tripos – boden hem wel een bestaanszekerheid in Oxford. Hij zou tot 1881 les blijven geven, ondanks het gegeven dat hij inmiddels kon rentenieren van de inkomsten van *Alice in Wonderland*.

Logische raadsels waren voor Dodgson een reden om wiskunde te beoefenen. Wiskundigen zagen hun werk als een ultieme vorm van logica, en deden zelfs pogingen om wiskunde, of onderdelen daaruit, in de logica te funderen: denk bijvoorbeeld aan het werk van Weierstrass, Dedekind en Peano. Dodgson publiceerde naast zijn bestsellers diverse lesboeken over meetkunde, logica en lineaire algebra. Zowel in zijn wiskundige werk als in zijn recreatieve wiskundewerk kwam hij graag terug op logica. Ook in de *Alice*-boeken speelde hij met logische raadsels



figuur 2 Filmposter *Alice in Wonderland* (2010)

of gebruikte hij juist logische absurditeiten als leermiddel. Logica was voor hem onlosmakelijk verbonden met taal en taalspellen. Hij was de popularisator van spellen met woorden die hij publiceerde in het tijdschrift *Vanity Fair*. De 'woordenladder', waarbij je steeds één letter van een woord mocht veranderen, en zo via bestaande woorden het ene woord moest veranderen in een ander was met het voorbeeld AAP – MAP – MAN tevens een stellingname in de destijds spelende discussie over de evolutietheorie.

Dodgson speelde graag met woorden en woordbetekenissen, ook in zijn boeken. Hij was er virtuoos in. Zijn eigen pseudoniem vond oorsprong in een taalspelletje: hij had zijn voornamen Charles Ludwig gelatiniseerd naar Carolus Ludovicus, die twee omgedraaid, en vervolgens in een Engelse variant terug 'vertaald'. Ook in die taalspelletjes schemert af en toe zijn beroep door. Zo laat hij Alice kennismaken met een griffoen en een '*mock turtle*', die zijn leven was begonnen als een echte schildpad. Hij was zelfs naar school geweest. Als Alice hem vraagt wat hij daar heeft geleerd, dan zegt de *Mock Turtle*:

'Reeling and Writhing, of course, to begin with,' the Mock Turtle replied; 'and then the different branches of Arithmetic—Ambition, Distraction, Uglification, and Derision.'
'I never heard of "Uglification",' Alice ventured to say. 'What is it?'
The Gryphon lifted up both its paws in surprise. 'What! Never heard of uglifying!' it exclaimed. 'You know what to beautify is, I suppose?'
'Yes,' said Alice doubtfully: 'it means—to—make—anything—prettier.'
'Well, then,' the Gryphon went on, 'if you don't know what to uglify is, you ARE a simpleton.'
Alice did not feel encouraged to ask any more questions about it [....]
'And how many hours a day did you do lessons?' said Alice, in a hurry to change the subject.
'Ten hours the first day,' said the Mock Turtle: 'nine the next, and so on.'
'What a curious plan!' exclaimed Alice.
'That's the reason they're called lessons,' the Gryphon remarked: 'because they lessen from day to day.'
This was quite a new idea to Alice, and she thought it over a little before she made her next remark. 'Then the eleventh day must have been a holiday?'
'Of course it was,' said the Mock Turtle.
'And how did you manage on the twelfth?' Alice went on eagerly.
'That's enough about lessons,' the Gryphon interrupted in a very decided tone.

Het succes van de kinderboeken van Lewis Carroll vertelt ons op de eerste plaats dat het schoolgaan als zodanig heel gewoon was geworden in de Britse middenklasse. Zonder leerplicht en zonder vast lesplan waren de lezers van de boeken over Alice zich bewust van een onderwijssysteem waarin taal en rekenen de basis vormden voor de intellectuele ontwikkeling van de jeugd. De verminkingen van de rekenoperaties waren grappig en herkenbaar voor de lezers van de *Wonderland*-boeken. In elk geval is met de succesvolle kinderboeken van Dodgson zichtbaar dat rekenen en logica dusdanig vanzelfsprekende fenomenen waren in Victoriaans Engeland, dat ze een rol konden vervullen in dit soort verhalen.

Het succes van de wiskundelesboeken van Dodgson was bepaald minder groot. Natuurlijk waren die ook voor een relatief klein publiek geschreven, maar Dodgson was als wiskundige ook veel behoudender dan als auteur. Zijn speelse, zij het op dat moment wat ouderwetse manier van omgaan met wiskunde, alsmede de status van reken- en wiskundeonderwijs in de late negentiende eeuw leven voor de goede verstaander echter voort in al zijn schrijfsels.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

STICHTING WISKUNDE KANGOEROE

OPROEP

Stichting Wiskunde Kangoeroe is op zoek naar vrijwilligers die het leuk vinden om tijdens conferenties en andere wiskundebijeenkomsten (bijvoorbeeld de Verenigingsdag van de NVvW, de Nationale Wiskundedagen, de Panamaconferentie, ...) zo nu en dan mee te helpen bij het verkopen/aanprijzen van allerlei Kangoeroespullen. Tevens zijn dit ook uitstekende gelegenheden om de Kangoeroewedstrijd bij de deelnemers onder de aandacht te brengen. We zoeken vooral iemand voor bijeenkomsten die in het noorden en oosten van het land worden georganiseerd. Onkosten worden vergoed en je krijgt natuurlijk ook een aantal leuke Kangoeroespellen mee.
Mocht je interesse hebben, laat het Martin Winkel dan weten via *info@w4kangoeroe.nl*

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE



PRIJSUITREIKING EN NIEUWE SCHOLENPRIJZEN

Op vrijdag 7 november werden op de Technische Universiteit Eindhoven de winnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade in het zonnetje gezet. Na drie rondes waren er in elke categorie (zesde klas, vijfde klas en vierde klas en lager) vijf prijswinnaars die een geldbedrag variërend van 50 tot 250 euro ontvingen, mogelijk gemaakt door de NVvW. Heel bijzonder is dat in de categorie vierde klas en lager twee tweedeklassers in de prijzen zijn gevallen. De volledige uitslag vindt u terug op *www.wiskundeolympiade.nl*.
In januari start er een nieuw wedstrijdjaar, met voor scholen dit jaar extra kans op prijzen. Zo zal er een apart klassement worden gemaakt voor scholen die dit jaar (of in de afgelopen twee jaar) nieuw mee zijn gaan doen. Om deelname van jonge leerlingen en meisjes extra te stimuleren, hebben we ook een prijs ingesteld voor de school met de beste onderbouwleerlingen en de school met de beste vrouwelijke deelnemers. Daarnaast zal voor de bestaande scholenprijs niet meer worden gekeken naar de somscore van de beste vijf deelnemers, maar naar de somscore van in totaal zes deelnemers: de beste twee uit de onderbouw, de beste twee uit klas 4 en de beste twee uit klas 5.

Schrijf uw school in via *wedstrijd.wiskundeolympiade.nl*. U kunt vervolgens zelf een geschikte dag en tijd uitzoeken in de periode van 19 t/m 29 januari om de eerste ronde op school af te nemen. Als u voor het eerst wedstrijdleider bent, kunt u inloggen op de wedstrijdsite door bij zowel de gebruikersnaam als bij het wachtwoord op de wedstrijdsite de brincode van uw school in te voeren.
De rest wijst zich dan vanzelf. In oktober zijn de informatiepakketten verzonden naar alle scholen. Als u meer posters, brochures of leaflets wilt, kunt u deze aanvragen via *info@wiskundeolympiade.nl*.

AANVULLING EXAMENARTIKEL

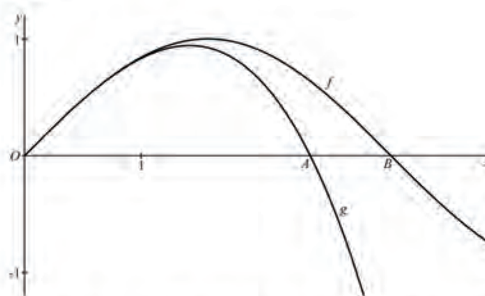
In het examennummer van september j.l. heb ik geschreven over vraag 13 in het examen havo wiskunde B 2014 eerste tijdvak. De vraag luidt: 'Bereken de maximale waarde van x waarvoor het verschil tussen $f(x)$ en $g(x)$ minder dan 0,01 bedraagt. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.' Na afloop van het examen is door een aantal mensen kritiek geleverd op de formulering van deze vraag. Zuiver wiskundig gezien is het eerste deel van deze vraag niet te beantwoorden. Echter, er kan worden nagegaan dat de waarde van x onder de gestelde voorwaarden niet groter dan 1,045 kan zijn en dat door de toevoeging van het tweede gedeelte een eenduidig antwoord gegeven kan worden. Naar de mening van de examenmakers en de CvTE-vaststellingscommissie was deze vraag voor de doelgroep begrijpelijk en doenlijk geformuleerd. De wiskundige onzuiverheid had wellicht voorkomen kunnen worden.

Ruud Stolwijk

f* boven *g

Op het domein $[0, 4]$ zijn de functies f en g gegeven door $f(x)=\sin x$ en $g(x)=x-\frac{1}{6}x^3$.
In de figuur zijn de grafieken van f en g getekend.

figuur



De grafiek van g snijdt de x-as in de oorsprong en in punt A. De grafiek van f snijdt de x-as in de oorsprong en in punt B.

5p **11** Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB.

Het maximum van g kan geschreven worden in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.

5p **12** Bereken exact de waarden van a en b.

De grafiek van f ligt voor $0<x\leq 4$ boven de grafiek van g.

4p **13** Bereken de maximale waarde van x waarvoor het verschil tussen $f(x)$ en $g(x)$ minder dan 0,01 bedraagt. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Uit: havo B 2014 tijdvak 1 (*f* boven *g*)

KANGOEROEKAMP 2014

Djurre Tijsma
Peter Ypma

Jaarlijks wordt er een internationaal Kangoeroekamp georganiseerd. Djurre Tijsma en Peter Ypma vertellen hoe het er daar aan toe gaat.



Afgelopen zomer zijn tien Nederlandse scholieren met ons naar het internationale wiskundekamp in Duitsland afgereisd. Voor dit kamp nodigde de Duitse Kangoeroe-organisatie landenteams uit, bestaande uit leerlingen die heel goed gescoord hebben op de WizPROF-versie van de Kangoeroewedstrijd. Naast het Nederlandse team waren er dit jaar teams uit Duitsland, Hongarije, Oostenrijk, Polen, Slowakije, Tsjechië en Zwitserland. Wij reisden met de deelnemers vanuit Deventer met de trein naar Berlijn. Daar werden we verwelkomd door de Duitse stafleden en reisden we met een paar andere landen door naar een voormalig DDR jeugdkampterrein nabij de Werbellinsee, een groot meer gelegen boven Berlijn. Hier werd het negen dagen durende kamp gehouden. Eenmaal op het kamp was het even wachten – spelletjes spelen en voetballen tegen de Tsjechen – tot alle landen waren gearriveerd. Daarna was er een groot spel, zodat de deelnemers van de verschillende landen kennis met elkaar konden maken. In de daaropvolgende week deden alle deelnemers veel met elkaar samen, zowel bij wiskundige activiteiten, sporttoernooien, als in de vrije tijd.

De Kangoeroewedstrijd in Nederland:
Dit jaar wordt de Kangoeroewedstrijd op donderdag 19 maart gehouden. Er zijn vijf verschillende niveaus. Het makkelijkste is WizFUN voor groep 3 en 4 van de basisschool. WizPROF is het moeilijkste voor 3 t/m 6 vwo en klas 4 en 5 havo. Een WizPROF-opgave van afgelopen jaar:

Tom heeft een aantal verschillende positieve gehele getallen, niet boven de 100, opgeschreven. Hun product is niet deelbaar door 18. Wat is het maximale aantal getallen dat hij kan hebben opgeschreven?

Elke dag begon met een wiskundeworkshop die de deelnemers in gemengde groepen volgden. Deze workshops gingen over uiteenlopende onderwerpen en er kwamen problemen aan de orde als 'Hoe bepaal je alle getallen die zowel een kwadraat als een driehoeksgetal zijn?' en 'Hoe kun je snel bepalen welke speler een winnende strategie heeft bij een willekeurige startpositie bij het spelletje *NIM*?' 's Middags en 's avonds waren er andere activiteiten. Zo werd op de tweede dag een wiskunde-speed-competitie in teams van vijf personen gehouden. Hierbij moesten de teams zo snel mogelijk 30 Kangoeroe-opgaven oplossen. Het was leuk om te zien hoe verschillende teams dit aanpakte. In sommige teams werden de krachten gebundeld en werd er druk samengewerkt en pas een antwoord gegeven als iedereen het eens was. In andere teams werkte iedereen apart en werd een antwoord gegeven als verschillende deelnemers dezelfde conclusie hadden getrokken. In elk team merkten we echter een soort teamspirit die je zelden bij een wiskundewedstrijd ziet!

Zelf een wiskunde-speed-competitie organiseren
Een wiskunde-speed-competitie kan ook gemakkelijk in de klas gehouden worden. Print van tevoren een aantal keer dezelfde oude Kangoeroewedstrijd en knip de opgaven uit. Geef in de klas ieder groepje steeds één opgave. Nadat een groepje of een goed antwoord of twee foute antwoorden heeft gegeven, krijgt het de volgende opgave. Het groepje dat op het einde de meeste opgaven heeft opgelost, wint. Als er twee groepjes evenveel opgaven oplossen, wint het snelste groepje.

Naast de wiskundeactiviteiten waren er verspreid over de week ook (denk)sportcompetities zoals voetbal, tafeltennis, volleybal en schaken en een drietal excursies, waaronder één dag naar Berlijn. In Berlijn bezochten de deelnemers eerst het natuurkundig doe-museum SPECTRUM, waarna de deelnemers in groepjes Berlijn onveilig mochten maken. Daarnaast liep de wiskundecompetitie als rode draad door de week. Ieder land kreeg een week de tijd om vijf pittige wiskundeopgaven op te lossen. Het Nederlandse team eindigde hierbij in de middenmoot. In het kader staan twee van de opgaven die het Nederlandse team (bijna helemaal) opgelost had. Ondanks de vele activiteiten, was er ook veel vrije tijd. Tijd genoeg dus voor spelletjes, lezen en zwemmen in het meer!

Over de auteurs

Djurre Tijsma en Peter Ypma zijn beide studenten wiskunde en natuurkunde in Utrecht. Ze waren als begeleider mee naar het wiskundekamp in Eberswalde. E-mailadressen: *peterypma@hotmail.com* en *djurretijsma@hotmail.com*.

COMBINATORIEK: MEER DAN TRUCJES

Mark Timmer
Nellie Verhoef

Mark Timmer en Nellie Verhoef blikken terug op een *Lesson Study* in 4 havo waarin geëxperimenteerd werd met het introduceren van telproblemen. In plaats van één voor één de combinatorische concepten uit het boek aan te leren, werden de leerlingen in het diepe gegooid, met verrassende resultaten en observaties.

In een aantal eerdere artikelen in *Euclides* hebben we het uit Japan afkomstige concept *Lesson Study* reeds uit de doeken gedaan. Kort gezegd komt dit neer op het met een *Lesson Study Team* (LST) voorbereiden van een lessenserie - bijvoorbeeld over een lastig onderwerp - gevolgd door een cyclisch proces van lesgeven, live-observeren, evalueren en bijstellen van die lessenserie. De nadruk ligt altijd op het leerproces van de leerlingen, niet op het functioneren van de docent.

Bij de introductie van de combinatoriek op zowel havo als vwo begint het boek met een uitleg over faculteiten, waar de leerlingen dan een aantal opgaven over moeten maken. Vervolgens komen de permutaties aan de orde en daarna de combinaties. Leerlingen zijn handig genoeg om te bedenken dat iedere opgave in de paragraaf *Permutaties* een permutatie betreft, en dus met de *nPr*-functie van de rekenmachine opgelost kan worden. Zo achter elkaar lukt het allemaal dus nog wel. Velen van u zullen echter de moeilijkheid herkennen die leerlingen ervaren als de sommen op het eind van het verhaal ineens door elkaar gehusseld worden. De meeste leerlingen zijn dan het overzicht volledig kwijt en hebben geen idee meer welke techniek ze nu bij welke opgave moeten gaan toepassen. Het was aan het begin van dit schooljaar daarom al snel duidelijk waar onze *Lesson Study* het eerste halfjaar over zou gaan: het meer inzichtelijk introduceren van dit soort telproblemen. Het liefst wilden we leerlingen hierbij zelf de verschillen tussen de concepten laten ontdekken, zodat ze vervolgens beter voorbereid zijn op gemengde opgaven waarbij niet direct duidelijk is welke techniek van toepassing is.

Voorbereiding

Nadat het onderwerp was vastgelegd, zijn we begonnen met het bestuderen van een aantal wetenschappelijke artikelen over combinatoriekonderwijs. We vonden hierin onder andere de observatie dat leerlingen vaak niet precies door hebben hoe een situatie nu eigenlijk in elkaar steekt: kunnen objecten in een vraagstuk bijvoorbeeld meerdere keren gekozen worden ('met terugleggen'), of tellen ze hoogstens eenmaal mee ('zonder terugleggen')? Het lijkt essentieel dat leerlingen zich inleven in de situatie waarin geteld wordt; wie kiest wat, en hoe gaat dat in z'n werk?

Op grond van onderzoek van Batanero, Navarro-Pelayo, en Godino[1] besloten we om leerlingen in de eerste les in het diepe te gooien, zonder eerst allerlei theorie uit te leggen. De leerlingen zouden in groepjes van vier worden verdeeld, ieder met de opdracht om uit een stapel van dertien verschillende telproblemen er drie op te lossen. Daarna zouden de leerlingen de telproblemen moeten groeperen: alle telprobleem van hetzelfde type moeten op dezelfde stapel komen (waarbij de leerlingen zelf de typen verzinnen). Bijvoorbeeld: het aantal manieren om vijf boeken op een boekenplank te ordenen is van precies dezelfde aard als het aantal manieren om drie personen op te delen in voorzitter, penningmeester en secretaris. Hoewel leerlingen nog niet weten dat dit allebei met een faculteit uitgerekend kan worden, hadden we wel de hoop dat ze zouden inzien dat er conceptueel gezien geen verschil is tussen de twee situaties. De dertien opgaven betroffen voornamelijk situaties die met faculteiten, permutaties en combinaties beschreven kunnen worden.

De tweede les zou vooral worden besteed aan het bespreken van de oplossingen van de leerlingen. Ze lichten hun indeling toe en de rest van de klas stelt vragen. Vervolgens zouden ze een vergelijkbare opdracht krijgen: in plaats van het vinden van een categorie voor een opgave, moeten ter afsluiting nieuwe vraagstukken bedacht worden per categorie (die op gelijke wijze opgelost kunnen worden).

Uitvoering en observaties

We waren met name nieuwsgierig naar de wijze waarop leerlingen aan de slag gaan met een stel telproblemen waar ze nog geen uitleg over hebben gekregen. Zouden ze gestructureerd gaan uitschrijven of op zoek gaan naar slimme berekenmethodes? Proberen ze zich te overtuigen van de correctheid van hun oplossingen? Welke verschillen tussen de typen problemen kunnen ze uit zichzelf identificeren?

Een van de deelnemers van het LST voerde de les uit, terwijl de rest tussen de leerlingen zat en observeerde. Tijdens de les bleek het voor de leerlingen maar wat lastig om überhaupt met de opgaven aan de slag te gaan. Velen waren nog niet wiskundig vaardig genoeg om zelf een oplosstrategie te bedenken. Ook het gestructureerd

Kader (vertaald uit [1])

1. Vijf leerlingen (Angela, Bernadette, Claudia, Dirk en Ezra) hebben zich opgegeven om een docent Frans te helpen met het klaarzetten van glazen en dergelijke voor een wijnproeverij (in een bovenbouwklas ter gelegenheid van de 87e verjaardag van de school). Hij heeft er maar drie nodig. Op hoeveel manieren kan hij drie leerlingen kiezen uit deze vijf? Hij kan bijvoorbeeld Bernadette, Claudia en Dirk kiezen.
2. De parkeergarage onder het appartement van Klaas heeft vijf genummerde plaatsen: 1 2 3 4 5. Omdat het gebouw nog heel nieuw is, zijn niet alle appartementen verhuurd. Alleen Klaas, Leonard en Maurice wonen er op dit moment en kunnen daar hun eigen auto parkeren. Bijvoorbeeld kan Klaas zijn auto op plaats nummer 1 zetten, Leonard op nummer 2 en Maurice op nummer 4. Op hoeveel verschillende manieren kunnen Klaas, Leonard en Maurice hun auto parkeren?

uitschrijven van alle mogelijkheden ging lang niet altijd van een leien dakje. Op basis van deze observaties is direct besloten om het programma voor de tweede les om te gooien. In plaats van de opzet die we in eerste instantie in gedachten hadden, begon de docent die tweede les zelf. Hij legde de klas een aantal keer een tweetal opgaven voor, waarvan in de eerste les was gebleken dat sommige groepjes ze als gelijk en andere groepjes ze als verschillend beschouwden. De leerlingen werd gevraagd hun keuzes te motiveren. Hierbij werd onder andere door iemand opgemerkt dat het aantal mogelijke manieren om iets te doen afhangt van of je een object meer dan eenmaal mag kiezen (een concept dat door de leerling tot 'terugstopping' werd gedoopt): mooi!

Op een gegeven moment kwam er een interessant tweetal opgaven aan de orde (zie kader). De eerste vroeg naar het aantal manieren om drie mensen te kiezen uit een groep van vijf mensen (een combinatie), de tweede naar het aantal manieren om drie auto's te parkeren gegeven vijf parkeerplaatsen (een permutatie). Zo op het oog lijkt het wel op elkaar: 3 kiezen uit 5. Toen er nog geen overtuigende argumenten naar voren kwamen betreffende de overeenkomstigheid danwel het onderscheid tussen de twee problemen, liet de docent de leerlingen de situatie fysiek naspelen. Hij koos willekeurig drie leerlingen uit en zette ze voor de klas. Dit was één manier om de leerlingen te selecteren (de combinatie). Vervolgens stelden deze leerlingen de drie auto's voor. De docent 'parkeerde' de leerlingen op een bepaalde manier voor het bord, waarbij de positionering de keuze voor de parkeerplaats representeerde (de permutatie). Hij vroeg de klas of ze zo mooi geparkeerd stonden. Op het antwoord 'Nee!' reageerde hij door de leerlingen in een andere volgorde te parkeren op dezelfde parkeerplaatsen. Ondanks dat de gekozen parkeerplaatsen niet gewijzigd werden, was er zo toch op een andere manier geparkeerd. Vervolgens greep de docent terug op het kiezen van de leerlingen en stelde hij de vraag of de positiewisseling de groep leerlingen had gewijzigd. De klas zag in dat dit niet het geval was, en zo viel het kwartje dat het parkeren van de auto's blijkbaar op meer manieren kan dan het uitkiezen van de leerlingen: bij het parkeren was de *volgorde* van belang, bij het kiezen van de groep niet.

Verbetering

Na afloop van de twee lessen concludeerden we aan de ene kant dat het uit het niets systematisch noteren en indelen nog te lastig is voor de leerlingen. Aan de andere kant hebben we ook geleerd dat het uitbeelden van de situaties een positief effect heeft. Op basis hiervan is de les bijgesteld, waarbij de nadruk meer kwam te liggen op het inleven in de situatie waarin telproblemen zich voordoen. Een andere collega heeft deze verbeterde lessen vervolgens uitgevoerd, waarbij wederom werd geobserveerd door de rest van het LST. Tijdens deze lessen bleek dat leerlingen het best moeilijk vinden om zonder sturing van de docent een situatie uit te beelden; vaak storten ze zich nog steeds te snel op het gebruik van formules die ze zich herinneren, zonder eerst eens goed na te denken over waar het nu precies om gaat.

Conclusie

We sloten deze *Lesson Study* af met de conclusie dat leerlingen echt een beeld moeten krijgen van de situatie waarin de telproblematiek zich afspeelt, voordat er teruggegrepen wordt op formules met 'eenvoudige' faculteiten, permutaties en combinaties. Visualisatie is belangrijk, maar zeker in het begin is enige sturing van de docent toch echt wel nodig. Zo heeft de *Lesson Study* iedere deelnemer weer behoorlijk aan het denken gezet, en zullen onze toekomstige lessen over combinatoriek meer gericht zijn op in- en uitbeelden dan op het aanleren van de standaardtrucjes!

Noot

[1] Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 181–199.

Dit artikel is afgeleid van een blog van Mark Timmer op *www.delerarenagenda.nl/blog*

Over de auteurs

Nellie Verhoef is onderzoeker en vakdidacticus wiskunde aan de Universiteit Twente. Mark Timmer is docent wiskunde aan het Carmel College Salland te Raalte.
E-mailadressen: *n.c.verhoef@utwente.nl*, *m.timmer@carmelcollegesalland.nl*

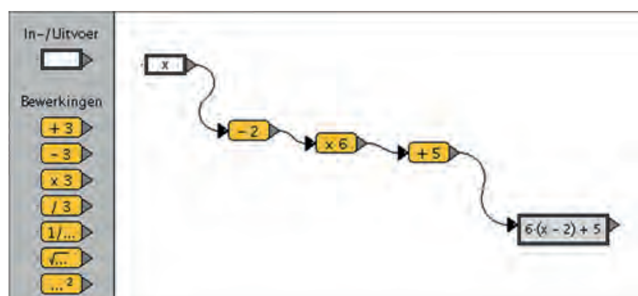
HET FIZIER GERICHT OP...

DE DIGITALE WISKUNDEOMGEVING (DWO)

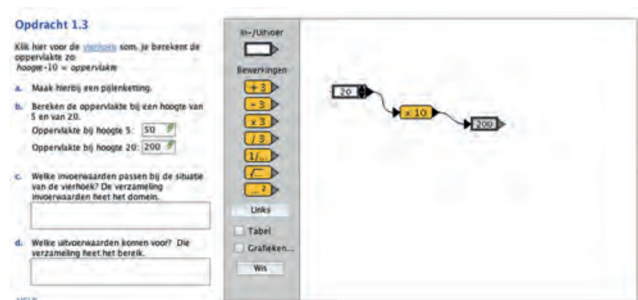
Peter Boon
Sietske Tacoma



In FIzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering bespreken Peter Boon en Sietske Tacoma de Digitale Wiskunde Omgeving.



figuur 1



figuur 2

Het Freudenthal Instituut werkt al geruime tijd aan ontwikkeling van ICT voor het wiskundeonderwijs. Zo'n vijftien jaar geleden begonnen we met de ontwikkeling van wiskundige *applets*, voor en samen met scholen. Deze applets, die gratis beschikbaar zijn op *WisWeb* [1], zijn kleine computerprogramma's waarin leerlingen bijvoorbeeld stapsgewijs vergelijkingen kunnen oplossen, 3D-figuren kunnen construeren of pijlenkettingen kunnen maken (zie figuur 1). Er zijn WisWeb-applets voor alle niveaus en alle klassen van het voortgezet onderwijs. Grote kans dat u de applets wel kent; ze werden en worden door veel docenten ingezet als extra oefening of als leuke afwisseling in de les.

Tijdens het ontwikkelen en gebruiken van de WisWeb-applets ontstond steeds vaker behoefte aan meer begeleidende opdrachten en grotere lesactiviteiten waarin de applets een rol spelen. Ook wilden docenten graag kunnen zien hoe de leerlingen met de applets hadden gewerkt. Naar aanleiding van deze wensen zijn we in 2005 gestart met de ontwikkeling van de Digitale Wiskunde Omgeving (DWO): een online leeromgeving met lesactiviteiten waarin uitleg, vragen en WisWeb-applets gecombineerd worden.[2] In figuur 2 ziet u hoe het pijlenkettingen-applet uit figuur 1 verwerkt is in een DWO-activiteit, met uitleg en vragen in een voor leerlingen herkenbare context.

In de ontwikkeling van de DWO zoeken we steeds naar meerwaarde die ICT kan bieden. Naast de WisWeb-applets hebben we bijvoorbeeld een aantal standaard opgavetypen ontwikkeld, zoals sleepopdrachten en vakken waarin leerlingen stapsgewijs een vergelijking kunnen oplossen. Hierdoor kunnen leerlingen in de DWO op allerlei manieren actief bezig zijn met wiskunde: formules invoeren, een grafiek tekenen, een meetkundige constructie maken, antwoorden naar een juiste plek slepen, enzovoort. Een andere meerwaarde van ICT is het kunnen geven van directe feedback op antwoorden van leerlingen. Door de feedback die de DWO geeft, kunnen leerlingen meteen reflecteren op fouten die ze maken en nagaan welk deel van de stof ze nog niet helemaal begrijpen. Ook bewaart de DWO het werk van de leerlingen en kan de docent dit leerlingwerk inzien. Op basis hiervan kan de docent besluiten een onderwerp nog eens extra klassikaal te behandelen, of een leerling of groep leerlingen extra ondersteuning of uitleg te geven.

In het DWO-project en andere projecten van het Freudenthal Instituut is een grote verzameling DWO-activiteiten ontwikkeld. U kunt dit materiaal zelf in uw klas gebruiken als uw school een DWO-schoolabonnement heeft.[3] Om het ontwikkelen van DWO-activiteiten eenvoudiger te maken, hebben we in de laatste jaren een auteursomgeving ontwikkeld. Hierin kunnen onderwijsontwikkelaars en docenten DWO-activiteiten maken, zonder dat daar programmeerkennis voor nodig is. U als docent kunt dus het DWO-materiaal naar eigen smaak aanpassen voor uw leerlingen, of zelfs volledig nieuw materiaal ontwerpen.

Ook de auteurs van de wiskundemethodes gebruiken deze auteursomgeving op uitgebreide schaal voor hun ICT-producten.

In het DWO-project speelt niet alleen de ontwikkeling van het product DWO een rol. Een belangrijk doel van het project is het ontwikkelen van kennis over en een visie op goed wiskundeonderwijs met behulp van ICT. De ervaringen van auteurs en docenten die met de DWO werken, geven ons informatie over wat wel en niet goed werkt met ICT. Deze informatie gebruiken wij niet alleen voor het verbeteren en verder ontwikkelen van de DWO, maar ook voor het uitbreiden van onze kennis over ICT-gebruik in wiskundeonderwijs. Hierover publiceren we regelmatig in wetenschappelijke tijdschriften.

Omdat er voortdurend nieuwe technologische ontwikkelingen zijn, is deze visie voorlopig niet af. Momenteel werken we in het project bijvoorbeeld keihard aan het beschikbaar stellen van de DWO op tablets[4], omdat tablets allerlei nieuwe mogelijkheden bieden in de klas. Zo kunnen leerlingen in een klas met tablets makkelijker in groepjes samenwerken dan in een computerlokaal mogelijk is. Het is echter nog een hele uitdaging om software te ontwikkelen die de mogelijkheden van deze tablets ook daadwerkelijk benut, zonder daarbij andere meerwaarden, zoals de diversiteit aan opgavetypen, te verliezen. In het DWO-project pakken we deze uitdagingen graag op, samen met docenten en onderwijsontwikkelaars. We nodigen u dan ook van harte uit om eens een kijkje in de DWO te nemen en uw ideeën met ons te delen.

Noten

[1] Zie *www.wisweb.nl*
[2] De DWO is bereikbaar via *www.dwo.nl*
[3] Meer informatie over het DWO-schoolabonnement vindt u op *www.wisweb.nl*
[4] De bèta-versie van de DWO voor de tablet is beschikbaar via *www.dwo.nl/tablet*

Over de auteurs

Peter Boon is universitair docent, werkzaam bij het Freudenthal Instituut. Hij is projectleider van het DWO-project. Sietske Tacoma werkt bij het Freudenthal Instituut aan onder meer het DWO-project en de organisatie van de Nationale Wiskunde Dagen.
E-mailadressen: *p.boon@uu.nl*, *s.g.tacoma@uu.nl*

KLEINTJE DIDACTIEK

Van natuurkundigen kunnen we bij wiskunde soms veel leren. Mijn collega's bij natuurkunde zetten bijvoorbeeld altijd de eenheden in hun verhoudingstabel in elke kolom erbij. Hun ervaring is dat dit aanzienlijk scheelt in de fouten in antwoorden.

Oppervlakte	1 m^2	317,52 m^2
kosten	€ 12,90	€ 4096,01

Daarnaast is de afspraak bij natuurkunde-examens dat liter met een hoofdletter L wordt afgekort. Dat voorkomt dat leerlingen het verschil niet zien tussen de getypte I, l en 1 (hoofdletter i, kleine letter L en het getal 1) iets wat ook bij een wiskunde- of rekentoets een rol kan spelen. Daarnaast is er bij leerlingen vaak verwarring over volume en inhoud. Het helpt dan enorm om even aan je leerlingen te vertellen dat met 'inhoud' bij wiskunde meestal hetzelfde wordt bedoeld als 'volume' bij natuurkunde.
Tot slot valt het mij vaak op dat leerlingen afronden bij wiskunde jarenlang goed doen en dan ineens tijdens examens de afrondingen alsnog compleet fout hebben. Wat is hier aan de hand? Vaak speelt daar de verwarring van natuurkunde en scheikunde met significante cijfers doorheen. Leerlingen lezen 'afronden op twee decimalen' als afronden op twee significante cijfers. Maar dat is iets heel anders. Want 317,52 m^2 heeft evenveel significante cijfers als 31752 dm^2, namelijk vijf. Het aantal significante cijfers zegt iets over hoe nauwkeurig is gemeten; 317,52 afgerond op twee significante cijfers is 320 m^2. Als u nu net zo in de war bent als uw leerlingen, lees dan [1]. Dan kunt u hen voortaan ook hiermee helpen.

Lonneke Boels

[1] Morélis, H. (1990). Significante cijfers... hoe zit dat nou? *NVON maandblad, 15,* 428-430. *www.ecent.nl/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=1&supportId=1960*

GELIJKE MONNIKEN, GELIJKE KAPPEN

Kenneth Tjon Soei Sjoe
Peter Kop
Marjolein van Haselen
Donald van As

Dit artikel is tot stand gekomen in samenspraak met Cito en het College voor Toetsen en Examens (CvTE). Het artikel heeft betrekking op de beoordeling van de examens wiskunde A en C. Aan het einde van het artikel wordt de situatie bij wiskunde B beschreven.

Hoewel de examenmakers van wiskunde A en C ervan uitgaan dat alle docenten hun leerlingen leren hun antwoorden wiskundig correct te formuleren, doen hun pupillen dat niet altijd op examens. Uit onder andere de discussies op het forum blijkt dat correctoren fouten in formuleringen soms verschillend beoordelen. Deze verschillen komen ook voor bij het beoordelen van afronden en het gebruik van eenheden, het beschrijven hoe de grafische rekenmachine (de GR) gebruikt is en bij het zogenoemde sprokkelen. Ons doel met dit artikel is om meer helderheid te verschaffen waardoor de verschillen in beoordeling van leerlingenwerk worden verkleind. Alle leerlingen verdienen een gelijkwaardige beoordeling van het CE (Centraal examen).
Een belangrijk uitgangspunt dat in dit stuk meespeelt bij de beoordeling van wiskundig incorrecte formuleringen bij wiskunde A- en C-leerlingen is dat het bij hen gaat om het kunnen gebruiken van wiskunde bij het oplossen van problemen in betekenisvolle contexten. Het wiskundig correct formuleren speelt daarbij een minder belangrijke rol. Vanuit dit perspectief past het de cruciale denkstappen in de redeneringen en berekeningen van de leerling te belonen en incorrecte wiskundige formuleringen niet altijd aan te rekenen. In de correctievoorschriften bij de CE's van wiskunde A en C staan vanaf 2015 drie vakspecifieke regels. Regel 1 en 3 zijn weliswaar niet nieuw, maar worden met ingang van 2015 enigszins aangepast.

Vakspecifieke regels bij wiskunde A/C vwo en wiskunde A havo:
1. Voor elke rekenfout wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
2. Als de kandidaat bij de beantwoording van een vraag een notatiefout heeft gemaakt en als gezien kan worden dat dit verder geen invloed op het eindantwoord heeft, wordt hiervoor geen scorepunt in mindering gebracht.
3. De algemene regel 3.6 *geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen geven de kandidaten een toelichting waaruit blijkt hoe zij de GR gebruikt hebben.

* Indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt danwel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven.

In dit artikel willen wij als de vaststellingscommissie wiskunde havo A en vwo A en C onze ideeën met betrekking tot de interpretatie van deze regels en het correctievoorschrift verduidelijken. Vooraf merken we op dat het correctievoorschrift altijd bindend is. Toch stellen we vast dat er ruimte is voor verschillen in interpretatie. Het blijkt ondoenlijk om bij het formuleren van correctievoorschriften 'alles dicht te timmeren'. Door middel van gerichte voorbeelden wil het CvTE aangeven hoe de correctievoorschriften bedoeld zijn; met andere woorden: wat 'de geest' is waarin het CE gecorrigeerd zou moeten worden. We zullen de afzonderlijke onderwerpen (notatiefouten, afronden, gebruik van eenheden, GR-gebruik beschrijven en sprokkelen) apart toelichten aan de hand van voorbeelden met begeleidend commentaar. Het moge duidelijk zijn dat dit slechts een illustratie is en dat de voorbeelden niet uitputtend zijn.

Notatiefouten
Doel van wiskunde A en C is onder andere dat leerlingen (wiskundige) problemen oplossen en hun oplossing onderbouwen. Correct kunnen formuleren is belangrijk en dient door leerlingen beheerst te worden. Deze leerlingen worden echter niet opgeleid om actief wiskundige notaties te kunnen gebruiken. Een passief gebruik van deze vaardigheid is voldoende. Daarom zijn wij van oordeel dat fouten in wiskundige notaties bij deze leerlingen niet altijd aangerekend moeten worden op het CE; notatiefouten in aanloop naar in essentie volledig juiste antwoorden kunnen zeker geaccepteerd worden. In niet volledig juiste antwoorden zal het soms lastig zijn om te bepalen of de leerling slechts een notatiefout maakt of dat hij een foutieve gedachtegang volgt.
Uitgangspunt is dat er geen scorepunten in mindering gebracht moeten worden, als een leerling een notatiefout gemaakt heeft bij de beantwoording van een vraag, terwijl gezien kan worden dat hij correct gehandeld heeft bij de daaropvolgende stappen.

De volgende passages in het leerlingenwerk moeten, hoewel onjuist genoteerd, geen puntenaftrek tot gevolg hebben:

1. $y = \frac{x^2 - 2x}{2x+1}$; $y' = \frac{(2x+1)(2x-2) - x^2 - 2x \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2 - 2x - 2 - 2x^2 + 4x}{(2x+1)^2}$;

De leerling verzuimt haakjes te zetten na het tweede '-' teken in de teller van de afgeleide, maar laat in de laatste breuk zien dat hij wel rekent alsof er haakjes staan en daardoor de juiste teller krijgt.

2. De leerling moet het verband geven tussen L en T ($L = 2T$); de leerling noteert echter '$2T$' of '$y = 2x$' en werkt verder correct met het verband $L = 2T$.

Een bijzondere notatiefout die aanleiding geeft tot discussie tussen correctoren is het 'breien'. Onderstaande voorbeelden van leerlingteksten geven aan dat de specifieke notatiefout 'breien' geen aanleiding is tot scorepuntenaftrek:

3. Een leerling moet opschrijven: $0{,}27 \cdot 0{,}13 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}09 = 0{,}0003$ dus 0,03%, maar schrijft $0{,}27 \cdot 0{,}13 = 0{,}03511 \cdot 0{,}11 = 0{,}00386 \cdot 0{,}09 = 0{,}0003 = 0{,}03\%$.

4. Moet opschrijven: $g = 9{,}6^{\frac{1}{42}} = \sqrt[42]{9{,}6} = 1{,}06$ dus 6%, maar schrijft: $g = 9{,}6^{\frac{1}{42}} = \sqrt[42]{9{,}6} = 1{,}06 = 6\%$

5. Moet in de berekening de afgeleide van $\frac{10}{x}$ uitrekenen en schrijft: $y' = \frac{10}{x} = 10x^{-1} = -10x^{-2}$;

   hij schrijft dus in de tussenstappen een vergelijking op waarbij functie en afgeleide gelijk zouden zijn.

Zoals eerder aangeven is de achterliggende gedachte dat, 'als gezien kan worden dat de notatiefout verder geen invloed heeft op het eindantwoord', deze niet aangerekend moet worden. Indien dit niet zichtbaar is, zal wel puntenaftrek moeten volgen.

6. Als de afgeleide van $y = \frac{10}{x}$ berekend moet worden

   en in het correctievoorschrift is aangegeven dat dit 1 scorepunt waard is, maar de leerling **slechts**

   als eindantwoord $y = \frac{10}{x} = 10x^{-1} = -10x^{-2}$

   opgeschreven heeft, dan kan dit scorepunt hier niet gegeven worden omdat onduidelijk is of de leerling inderdaad de afgeleide berekend heeft. Hier gaat het om een eindantwoord dus er is geen vervolg waaruit blijkt dat bedoeld is: $y' = -10x^{-2}$.

Afronden

Uit de syllabus blijkt dat leerlingen geen kennis van significantie hoeven te hebben. Daarom zal er in het algemeen genoegen worden genomen met antwoorden die nauwkeuriger zijn. Er zijn echter enige situaties waarin wel eisen worden gesteld aan de nauwkeurigheid van het antwoord. Soms is voorgeschreven hoe nauwkeurig het antwoord gegeven moet worden (bijvoorbeeld bij 'Rond je antwoord af op honderdtallen' of 'Bereken in 2 decimalen nauwkeurig ...'). In deze gevallen is het duidelijk dat als niet voldaan wordt aan dit voorschrift er scorepuntenaftrek plaatsvindt.

Indien echter geen nauwkeurigheid van het antwoord voorgeschreven is, bepaalt vaak de context de nauwkeurigheid. Een geldbedrag voor een *afzonderlijk* product kan bijvoorbeeld wel 23,15 euro zijn (of 23 euro) maar niet 23,1467 euro. Het aantal personen in een autobus moet geheel zijn en niet 53,7. Hier dwingt de context tot afronden op twee decimalen, respectievelijk gehelen. Ook hier moet(en) er (een) scorepunt(en) in mindering gebracht worden, als de kandidaat het antwoord niet met de juiste nauwkeurigheid gegeven heeft.
Een bijzondere situatie doet zich voor bij vragen waarbij er naar boven (of naar beneden) móet worden afgerond. In dit soort situaties kan 'gewoon' afronden leiden tot een situatie waarin niet aan het gestelde voldaan is.

1. In het examen vwo wiskunde A 2013 tijdvak 1 vraag 19 is gevraagd: hoe ver moet een atlete *ten minste* springen om een bepaald aantal punten te halen. Daarvoor moet deze vergelijking $3827 = 0{,}188807(X - 210)^{1.41}$ met de GR opgelost worden: dat geeft een waarde voor X van 1343,696267 (cm) en dus als antwoord 13,44 meter. Antwoorden als 13,437 meter of 13,436963 meter zijn ook goed omdat die naar boven zijn afgerond, maar een antwoord als 13,43696 meter is fout omdat hier naar beneden is afgerond, ondanks de toevoeging (of nauwkeuriger) in het correctievoorschrift (CV). De vraagstelling (*ten minste*) dwingt hier dat er 'naar boven afgerond' moet worden, ongeacht de gekozen nauwkeurigheid
2. Nog duidelijker is als bijvoorbeeld de vergelijking $2770 = 0{,}188807(X - 210)^{1.41}$ opgelost had moeten worden waarbij de vraagstelling dezelfde was als hierboven. Dan is een juist antwoord 1112 (de GR geeft 1111,44111); het antwoord 1111 is niet juist en zal geen scorepunten opleveren aangezien er naar boven afgerond moest worden.

Soms zal een leerling moeten aangeven dat zijn antwoord afwijkt van triviale uitkomsten. Bij kansrekening zal de leerling bijvoorbeeld duidelijk moeten aangeven dat zijn antwoord afwijkt van 0 of 1 en bij exponentiële functies dat de groeifactor afwijkt van 1. Indien geen afronding is voorgeschreven, zal een kans van $\left(\frac{1}{6}\right)^5$ dus als meest onnauwkeurige antwoord 0,0001 hebben en niet 0,000. Bij berekeningen met exponentiële functies zal een afronding van 1,0043 naar 1,00 of een afronding van 0,0002 naar 0,000 niet aanvaardbaar zijn. Als uit de context blijkt dat de berekeningen en antwoorden overdreven nauwkeurig maar niet fout zijn, zal dat niet tot scorepuntenaftrek moeten leiden, hoewel we hopen dat in het onderwijs afwegingen met betrekking tot afronding aan bod komen.

1. Bij een vraag naar het jaarlijkse groeipercentage in een situatie waarbij het aantal van 1000 tot 9600 groeit in een periode van 42 jaar, kan een leerling een antwoord geven als 5,5327877%.
2. Een kans ter grootte van $\left(\frac{5}{6}\right)^4$ zou wellicht afgerond genoteerd kunnen worden als 0,4822530864.

In beide voorbeelden zijn de antwoorden overdreven nauwkeurig, maar niet fout, gezien de context en leiden daarmee dus niet tot scorepuntenaftrek.

Gebruik van eenheden

Met betrekking tot het gebruik van eenheden zullen we hier drie gevallen bespreken:

1. Indien in de vraag de eenheid vermeld wordt, hoeft deze niet in het antwoord herhaald te worden. Bijvoorbeeld bij een vraag als: Bereken hoeveel ton ...; dan zal in het correctievoorschrift (CV) de eenheid tussen haakjes staan (in dit geval 89.000 (ton)) en dus moet het antwoord 89.000 goed worden gerekend. Merk op dat antwoorden als 8.900.000 of 8.900.000 kg fout zijn en dus tot aftrek van scorepunten leiden. De vraag was immers: hoeveel ton!
2. Indien in de stam slechts één bepaalde eenheid gebruikt wordt en er geen eenheid in de vraag vermeld wordt, dan hoeft de eenheid niet in het antwoord herhaald te worden. Bijvoorbeeld: in havo wis A 2013 I vraag 18 staat slechts de eenheid ‘cm’. In de vraag wordt geen eenheid vermeld. In het CV staat de eenheid tussen haakjes. Die mag dus in het antwoord weggelaten worden, omdat er geen misverstand kan bestaan over de bedoelde eenheid (6,1 (cm)). Als de leerling in het antwoord een andere eenheid gebruikt, moet deze vermeld worden. Bij de genoemde vraag is naast 6,1 (cm) dan ook 0,061 meter (natuurlijk) goed, maar 0,061 niet.
3. Indien in de stam meerdere eenheden worden gebruikt en in de vraag geen eenheid wordt vermeld, moet het antwoord met een eenheid worden gegeven.

Wiskunde B

- Bij ‘Vakspecifieke regels bij wiskunde A/C vwo en wiskunde A havo’
  Voor wiskunde B geldt
  1. Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
  2. De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij kandidaten de grafische rekenmachine gebruiken. Bij de betreffende vragen geven de kandidaten een toelichting waaruit blijkt hoe zij de GR hebben gebruikt.
- Bij ‘Notatiefouten’
  Bij een wiskunde B-examen moet de leerling blijk geven antwoorden en bewijsvoeringen door middel van een zorgvuldig gebruik van notaties, symboliek en een heldere redeneertrant verkregen te hebben. Daarom geldt de nieuwe vakspecifieke regel m.b.t. notatiefouten, zoals geformuleerd voor wiskunde A/C, **niet** voor wiskunde B. Bij wiskunde B dienen notatiefouten (verschrijvingen) dus aangerekend te worden zoals beschreven in vakspecifieke regel 1.
- Bij ‘Afronden’
  Voor wiskunde B geldt t.a.v. het afronden hetzelfde als bij wiskunde A/C.
- Bij ‘Gebruik van eenheden’
  Voor wiskunde B geldt t.a.v. het gebruik van eenheden hetzelfde als bij wiskunde A/C.
- Bij ‘Beschrijving van het gebruik van de GR’
  Voor wiskunde B geldt t.a.v. de beschrijving van het gebruik van de GR hetzelfde als bij wiskunde A/C.
- Bij ‘Sprokkelen’
  Voor wiskunde B geldt t.a.v. sprokkelen hetzelfde als bij wiskunde A/C, met als toevoeging bij III:
  T.a.v. opgaven in de VWO-examens waarin een *bewijs*voering wordt gevraagd, kunnen slechts scorepunten worden toegekend als de kandidaat de logische volgorde van de stappen in de bewijsvoering heeft aangehouden.

Beschrijving van het gebruik van de GR

De bovengenoemde vakspecifieke regel 3 vertelt dat de kandidaat toe moet lichten hoe hij de GR gebruikt. Sinds enige tijd gebruiken we in het CV de omschrijving ‘beschrijven hoe ... opgelost kan worden met GR’. De laatste jaren verdwijnt in veel gevallen zelfs de toevoeging ‘met de GR’ en staat er bijvoorbeeld in het CV bij het oplossen van vergelijkingen slechts ‘beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden’. Vaak gaan we er dan wel vanuit dat de GR ingezet zal worden. Langzamerhand lijkt de GR een vanzelfsprekend stuk gereedschap voor leerlingen te zijn geworden. Dat brengt met zich mee dat de uitgebreide omschrijvingen hoe de GR ingezet kan worden achterwege kunnen blijven. Een verwijzing als

'equa' (bij Casio) of 'solver' of 'snijpunt grafieken' (bij TI) lijkt voldoende. Bij de normale verdeling is *Ncd* (Casio) of *normalcdf* (TI) voldoende. Dit des te meer omdat deze onderdelen van het antwoord in het algemeen niet meer dan 1 punt waard zijn. Algemeen blijft gelden dat een leerling zijn antwoorden moet toelichten en dat hij dus globaal moet beschrijven hoe hij de GR gebruikt en dus niet kan volstaan met de verwijzing 'met de GR'.

Sprokkelen

Onder sprokkelen verstaan we het oneigenlijk toekennen/vergaren van scorepunten. Het bolletjesmodel dient op de volgende wijze gebruikt te worden om sprokkelen te voorkomen én om er voor te zorgen dat kandidaten geen punten onthouden worden waar zij recht op hebben.

I. Als een leerling een vraag goed beantwoordt en voldoende toelichting geeft, krijgt hij alle scorepunten voor de betreffende vraag. De onderverdeling van de scorepunten in het CV is niet van belang.

II. Als een leerling ergens in het oplossingsproces dat in het CV beschreven wordt, een kleine (reken)fout maakt, *dan wordt hier conform vakspecifieke regel 1 een scorepunt voor in mindering gebracht, tenzij het bolletjesmodel anders aangeeft.*

III. Als een leerling ergens halverwege afhaakt in een oplossingsproces dat in het CV beschreven wordt, wordt de onderverdeling (het bolletjesmodel) gebruikt om vast te stellen hoeveel scorepunten een leerling verdiend heeft. Het bolletjesmodel geeft dus het aantal scorepunten 'indien je niet verder komt dan hier, krijg je ... scorepunten'

IV. Als een leerling zonder enige onderbouwing een aanname doet om daarmee antwoord te kunnen geven op de vraag zullen na de aanname voor dit onderdeel in het algemeen geen verdere scorepunten worden toegekend. (Zie V. en voorbeeld 1 hieronder.)

V. Als een leerling ergens in het oplossingsproces dat in het CV beschreven wordt, een fundamentele fout (bijvoorbeeld een verkeerd model) of een grote rekenfout maakt, waardoor de vraag (essentieel) verandert, dan helpt het bolletjesmodel van het CV om vast te stellen hoeveel punten de leerling tot dan toe behaald heeft. Voor het deel dat na de fundamentele fout komt, moet gekeken worden of het probleem niet te sterk vereenvoudigd wordt (zie voorbeeld 3 hieronder) en of er verder gewerkt wordt in de geest van de oplossing van het probleem; er moeten vergelijkbare handelingen worden verricht. De beoordeling geschiedt verder op vakinhoudelijke argumenten (zie voorbeeld 4 hieronder). Als na de fundamentele fout slechts het antwoord volgt, kunnen geen scorepunten meer worden toegekend (zie voorbeeld 2).

'CORRECT KUNNEN FORMULEREN IS BELANGRIJK EN DIENT DOOR LEERLINGEN BEHEERST TE WORDEN'

We schetsen een aantal voorbeelden waarin duidelijk aan te geven is 'hoe te handelen', maar realiseren ons dat dit steeds per situatie bekeken moet worden. Voorbeelden waarbij geen punten meer toegekend moeten worden:

1. Uit vwo wiskunde C 2013 tijdvak 1 pilot vraag 1: hier wordt gevraagd of de relatieve toename van het aandeel van armen en handen groter is dan de relatieve toename van het aandeel van benen en voeten. Om de toenamen (de percentages) te berekenen, moet er een aantal stappen gezet worden. Een leerling voert geen enkele berekening uit, maar doet een aanname en schrijft slechts op 'stel dat de toename bij armen en handen 21% is en die bij benen en voeten 25%; dan zou het aandeel van benen en voeten relatief het meest zijn toegenomen'. Het laatste punt van het CV (dus het aandeel van de lichaamsoppervlakte van benen en voeten is relatief het meest toegenomen) wordt niet toegekend. In dit voorbeeld wordt de probleemstelling van de context niet gebruikt, maar wordt er slechts op basis van aannames, los van de context, een variant van een regel van het correctievoorschrift opgeschreven. Honoreren hiervan zou sprokkelen zijn en dus mogen er na de aannames geen scorepunten meer worden toegekend.

Voorbeelden bij fundamentele fouten.

2. Stel, de volgende vraag wordt gesteld: Iemand zet 10000 euro op een spaarrekening waar jaarlijks 5 % rente op wordt vergoed. Volgens hem betekent dit dat het ingezette bedrag na 20 jaar precies is verdubbeld. Ga met een berekening na of deze bewering klopt. De leerling zou als antwoord moeten geven: Het bedrag na 20 jaar is $10000 \cdot 1{,}05^{20} = 26533$ (2 punten). Dit is meer dan 2 maal 10.000, dus de bewering is onjuist (1 punt). Hij schrijft: '5% per jaar is gelijk aan $20 \cdot 5\% = 100\%$ in 20 jaar. Het bedrag is na 20 jaar dus 20000, dus de bewering is juist.' Het laatste punt mag hier nu niet toegekend worden, dus deze leerling krijgt geen punten voor deze vraag.

3. Er wordt gevraagd aan te tonen dat de afgeleide van $L = \frac{4T - 30}{T+2}$ steeds positief is. Het CV geeft voor $L' = \frac{38}{(T+2)^2}$ 2 punten en voor de redenering 'teller en noemer zijn positief dus L' is positief' 1 punt. Een leerling die opschrijft dat $L' = \frac{4}{1} = 4$ en dat dus L' positief is, krijgt geen punten. Ook het laatste punt kan na de fundamentele fout niet gegeven worden.

4. In vwo wiskunde A 2012 tijdvak 1 pilot was vraag 19 de korte onderzoeksvraag met 8 punten. De vraag was: 'Onderzoek, uitgaande van bovengenoemde trendmatige ontwikkelingen, in welk jaar de totale perenopbrengst voor het eerst groter zal zijn dan de totale appelopbrengst'.
   - op basis van de gegevens moeten voor zowel appels als peren lineaire formules gemaakt worden voor de *opbrengst per hectare per jaar* en voor de *totale oppervlakte in hectare*. (Stappen 1 en 2 in het CV);
   - hierna moet voor zowel appels als peren een formule voor de *totale opbrengst per jaar* gemaakt worden. (Stappen 3 en 4 in het CV);
   - daarna moet onderzocht worden in welk jaar de totale perenopbrengst voor het eerst groter is dan de totale appelopbrengst. (Stappen 5 tot en met 8 in het CV).

Als een leerling in de stappen 1 tot en met 4 een fundamentele fout maakt en met exponentiële formules (in plaats van lineaire formules) werkt, moet de rest van de uitwerking op wiskundig inhoudelijke argumenten beoordeeld worden. Als de leerling nu vervolgens zonder fouten verder doorwerkt, zal hij nog een aantal scorepunten kunnen krijgen, omdat verder gewerkt is in de geest van de vraag en er geen verregaande vereenvoudiging opgetreden is. Dus ondanks de fundamentele fout in het begin is er geen sprake van sprokkelen als er voor de vervolgstappen nog punten worden toegekend. Met deze voorbeelden zijn de problemen van beoordelen niet opgelost. In een aantal gevallen zal het lastig blijven om te beoordelen of het bolletjesmodel van het CV gevolgd kan worden of dat er sprake is van sprokkelen.

Tot slot

We hebben voor wiskundige notaties, afronden, het gebruik van eenheden, beschrijving van de GR en sprokkelen, door middel van voorbeelden geschetst in welke situaties wel en in welke geen scorepunten gegeven kunnen worden, indien het CV hier geen uitspraak over doet. Met deze voorbeelden zijn de problemen van beoordelen niet opgelost. Helemaal eenduidig kan het CV niet altijd zijn. Ons doel met dit artikel is om meer helderheid te verschaffen waardoor de verschillen in beoordeling van leerlingenwerk worden verkleind.

Over de auteurs

Kenneth Tjon Soei Sjoe is docent wiskunde en was tot augustus 2014 voorzitter van de vaststellingscommissie wiskunde havo A en vwo A en C. Peter Kop is lid van de vaststellingscommissie wiskunde havo A en vwo A en C, vakdidacticus bij het Iclon in Leiden en wiskunde docent aan GSG Leo Vroman in Gouda. Marjolein van Haselen was docent wiskunde in vo, hbo en wo en is sinds augustus 2014 voorzitter van de vaststellingscommissie wiskunde havo A en vwo A en C. Donald van As is als freelancer werkzaam als docent in het universitair en hoger beroepsonderwijs en geeft trainingen aan functionarissen uit het bedrijfsleven (wiskunde/statistiek/financieel en actuarieel rekenen/financiële planning).
Hij is (co-)auteur van een zestal studieboeken.
E-mailadressen: *johntjon26@gmail.com*; *koppmgm@iclon.leidenuniv.nl*; *mvanhaselen@gmail.com*; *dpgvanas@xs4all.nl*

LESMATERIAAL

VOOR 3 HAVO EN 3 VWO

Wiskundigen weten dat wiskunde in talrijke vakgebieden aanwezig is, van sport tot het weerbericht. Maar voor leerlingen is dat minder duidelijk. Twee nieuwe lessenseries, voor 3 havo en 3 vwo, proberen leerlingen een inkijkje te geven in de belangrijke rol die wiskunde in de samenleving vervult.
In het havo-lesmateriaal maken de leerlingen kennis met *revenue management*: hoe je, door verschillende tarieven te hanteren, meer winst kunt maken.
Het lesmateriaal voor vwo gaat in op een eenvoudig model om de verspreiding van ziektes te beschrijven.
De leerlingen simuleren de verspreiding van een ziekte, en rekenen uit hoeveel mensen in een populatie ingeënt moeten zijn om de verspreiding van een ziekte tegen te gaan. Beide lespakketten eindigen met een open opdracht, waarin de leerlingen hun opgedane kennis moeten toepassen om een oplossing voor een open probleem te bedenken. Beide lessenseries zijn bedoeld voor drie lesuren van vijftig minuten.
Het lesmateriaal sluit aan op het boek *Succesformules: Toepassingen van wiskunde* van Bennie Mols en Ionica Smeets. Het lesmateriaal is gratis te downloaden via: *www.praktijk.nu/lesmateriaal/68/toepassingen-van-wiskunde.html*

UITDAGENDE PROBLEMEN

BASSIN VAN BIBRACTE

Jacques Jansen

Ga met uw leerlingen terug in de tijd. De Galliërs hebben in Bourgondië zo'n 2100 jaar geleden een bassin geconstrueerd met de hulp van de stelling van Pythagoras. Maar hoe precies? Jacques Jansen geeft u een rondleiding langs dit archeologische pareltje.

Vakantie is vakantie. Toch kan ik geometrische objecten die ik tijdens de vakantie tegenkom niet ijskoud negeren. Een prachtig object kwam ik tijdens de zomervakantie tegen in Bourgondië op de Mont Beuvray. Op deze berg, met een hoogte van 821 meter, vestigde zich in de tweede eeuw voor Christus een Keltische stam, de Haeduers (Eduens). Het gebied lag in het toenmalige Gallië, voor sommigen van ons beter bekend als het land van Asterix en Obelix. Zij bouwden daar hun *oppidum* (vestingstad) Bibracte. Nu is het een archeologisch terrein met een modern museum[1], zie figuur 1.



figuur 1



figuur 2

In de hoogtijdagen telde de vestingstad wel bijna 10000 inwoners. De stad heeft zeker een dikke honderd jaar bestaan. Aan het begin van de Christelijke jaartelling raakte de stad in verval, mede door Romeinse aanvallen. Zo'n 25 km verderop ontstond een andere stad, Autun, die nu de status van belangrijke provinciestad in Bourgondië heeft. Op de hoofdweg van de stad Bibracte werd een bassin gebouwd, een grote bak waarin water werd opgeslagen. Het bassin had een publieke functie. Bij de constructie van het bassin werd handig gebruik gemaakt van de Stelling van Pythagoras. Maar hoe precies?

Vorm en andere bijzonderheden van het bassin

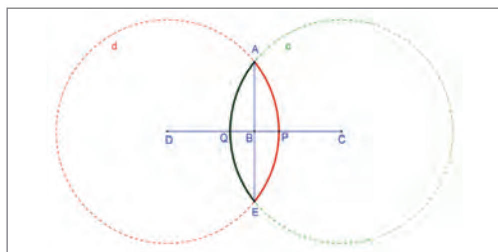
De vorm van het bassin lijkt op het profiel van een boot en bestaat uit twee even grote cirkelbogen, zie figuur 2. Als lengte-eenheid gebruikte men een afstand van drie voet. Een voetlengte was in die tijd 30,3 cm. De breedte van het bassin is zes voet, dus twee eenheden. De lengte is achttien voet, dus zes eenheden. De lengte van het bassin is dus driemaal de breedte van het bassin.

Over het bassin van Bibracte[2]
Ontdekt in 1987 in het midden van de grote avenue, is dit bassin met een omtrek van 11 meter in de vorm van de romp van een boot, één van de mooiste stukken van de stedelijke architectuur gevonden in Bibracte. Dit bassin is geconstrueerd volgens Hellenistische regels met zorgvuldig gehakte blokken roze graniet. De bodem van het bassin bestaat uit klei. Een ondergronds kanaalstelsel zorgde voor de afvoer van het water. Het is echter niet bekend hoe het water naar het bassin werd gebracht. De plaats en het ontwerp maken er een uitzonderlijk monument van. Het ontwerp is bepaald door een geometrische constructie welke de uitkomst is van de stelling van Pythagoras, uitgaande van een eenheid van drie voet waarbij een voet 30,3 cm is.

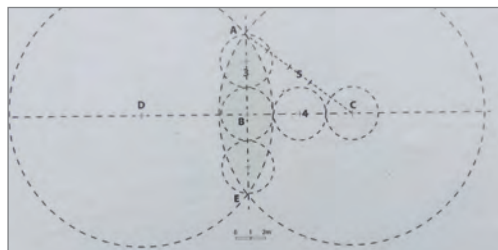
Voordat u verder leest, is het aardig om zelf na te gaan hoe de Galliërs dit bassin hebben ontworpen. Hoe kwamen ze aan twee cirkelbogen die samen zo'n bootvorm opleveren van twee eenheden breed en zes eenheden lang? Dit is ook een uitdagende vraag om eens aan uw leerlingen te stellen. En als de precieze constructie bekend is, dan kan de volgende vraag zijn om uit te zoeken wat de omtrek van het bassin is; volgens de omschrijving zou dit 11 meter zijn. Wellicht komen uw leerlingen nog met andere dingen die ze willen weten van dit bassin.



figuur 3



figuur 4


figuur 5

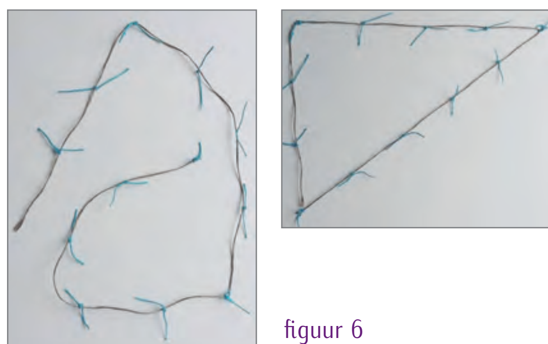
Geometrische constructie

Met twee bierviltjes of twee onderzetters kunnen we gaan experimenteren. Eén onderzetter houden we op de plaats, de andere schuiven we ernaar toe. Zie figuur 3. De bootvorm ontstaat als het overlappende stuk van de twee onderzetters. We zien dat de bootvorm twee symmetrie-assen heeft die loodrecht op elkaar staan. Zie figuur 4, waarbij ik dankbaar gebruik heb gemaakt van de middelen van de moderne tijd, in dit geval *GeoGebra*. De Galliërs hebben het uiteraard zonder moeten doen. De middelpunten van de twee congruente cirkels c en d zijn respectievelijk C en D. Punten A en E zijn de snijpunten van beide cirkels. De cirkels snijden lijnstuk DC in de punten P en Q. De lijn AE is de middelloodlijn van DC, dus hoek ABC is een rechte hoek. De vraag is nu: hoe krijg je het voor elkaar dat de lengte van de bootvorm driemaal zo groot is als de breedte van de bootvorm? Anders gezegd: AE moet driemaal zo groot zijn als PQ. Dus moet gelden: $AB = 3 \cdot BP$. BP moet drie voet zijn en drie voet werd als 1 eenheid genomen. De straal van cirkel c is onbekend. Met de kennis van nu noteren we: $AC = r$. Samengevat hebben we voor driehoek ABC de volgende gegevens:

- $\angle ABC = 90°$;
- $BP = 1$ en $AB = 3$;
- $AC = r$;
- $BC = r - 1$.

En daar komt die dan, de **Stelling van Pythagoras**: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Invullen van de gegevens: $r^2 = 9 + (r - 1)^2$. Haakjes wegwerken: $r^2 = 9 + r^2 - 2r + 1$. En dat geeft: $r = 5$.
Het resultaat is dat we moeten gaan werken met twee cirkels met een straal van vijf eenheden waarbij de middelpunten op een afstand van acht eenheden liggen. Verder blijkt driehoek ABC een 3-4-5-driehoek te zijn. Maar laten we voorzichtig zijn. Was dit wel de gedachtegang van de Eduens?

Als toerist moet je het doen met een bij het bassin geplaatst bord waarop een afbeelding staat van een ontwerptekening. Zie figuur 5. Hier zien we dat de straal van de grote cirkel met middelpunt *C* inderdaad vijf eenheden lijkt te zijn en de breedte van de overlap tussen de twee cirkels twee eenheden. Ook hier krijgen we dus de 3-4-5-driehoek terug en wordt de lengte van het bassin zes eenheden. Wellicht hebben de Eduens bij de constructie gebruikgemaakt van de 3-4-5-steek, een voorloper op de Stelling van Pythagoras. Bij de oude Egyptenaren was dit al bekend. Om een rechte hoek te maken, gebruikten ze een touw met 12 knopen, zie figuur 6. Zij gebruikten dit naar alle waarschijnlijkheid bij het bouwen van hun piramides en tempels.



figuur 6

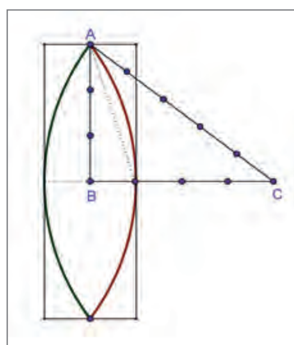
Omtrek en inhoud bassin

Nu we precies weten hoe de bootvorm geconstrueerd is, kunnen we rekenen aan de omtrek en inhoud. De bootvorm kun je opvatten als een samenstelling van vier even grote cirkelboogjes. Dan geeft $\frac{\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}{360}$ het deel van zo'n cirkelboogje van de cirkel met de straal van vijf eenheden (van elk drie voet). De omtrek van het bassin is dan $4\cdot\frac{\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}{360}\cdot 2\pi\cdot 5\cdot 0{,}303\cdot 3 \approx 11{,}70$ meter.

Nu de berekening van de inhoud van het bassin. Met mijn wandelstok heb ik de diepte gemeten en ik vermoed dat de diepte zes voet is. De leerlingen laten we natuurlijk een ruwe schatting maken aan de hand van bijvoorbeeld figuur 7.



figuur 7



figuur 8

Figuur 8

De vorm van het bassin past ongeveer in een rechthoek van 2 bij 6 eenheden. Zie figuur 8. Voor een eerste schatting nemen we voor het gemak even aan dat een eenheid 1 meter is. De oppervlakte van het bassin is iets meer dan de helft van de oppervlakte van de rechthoek. We komen dus op een oppervlakte van ruim 6 vierkante meter en op een inhoud van 12 m^3. Dus een inhoud van ruim 12000 liter.
Nu gaan we over tot de precieze berekening. Eerst berekenen we de oppervlakte van de bodem, die we kunnen beschouwen als twee keer een taartpunt (cirkelsegment) waar een driehoek van basis 6 en hoogte 4 vanaf gaat. We letten bovendien goed op de eenheden.
Oppervlakte bodem is

$$2\cdot\left(2\cdot\frac{\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}{360}\cdot 25\pi - 12\right)\cdot\left(0{,}303\cdot 3\right)^2$$

vierkante meter, dus inhoud bassin = (oppervlakte bodem)·6·0,303 ≈ 12,28 m^3. Dus ruim 12000 liter en dat komt mooi overeen met onze schatting.





figuur 9

Logistiek

Terug naar ons al eerder aangekondigde Gallische vrienden. Wat de archeologen tot nu toe niet hebben kunnen achterhalen, is hoe die 12000 liter naar het bassin gebracht werd. We zullen dus een beroep moeten doen op de creativiteit van onze leerlingen. Dat geeft meteen ook weer aanleiding tot een mooie rekensom. Bijvoorbeeld: elke keer vervoert Asterix met een kruik 10 liter water. Obelix is veel sterker en pakt meteen 20 liter. Zie ook figuur 9. Ze lopen beiden even vaak. Hoe vaak moeten zij heen en weer lopen met water? Ik ga ervan uit dat uw leerlingen tot een veel fraaiere vraagstelling komen. We vernemen het graag.

Noten

[1] Museum Bibracte, Mont Beuvray Frankrijk, *www.bibracte.fr*
[2] Zie *www.bibracte.fr/nl/ontdek/bibracte/een-bezoek-aan-het-opgravingsgebied_02_01_05.html*

Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

NIEUWE TIJDEN

VAKANTIECURSUS 2014

Gert de Kleuver

Zoals elk jaar bezocht Gert de Kleuver de vakantiecursus, en doet daar verslag van in *Euclides*. Hij hoopt dat het u inspireert om volgend jaar ook (weer) te gaan.

De vakantiecursus kent een traditie van 65 jaar. Dit vermeldt Jan Wiegerinck, de voorzitter van de programmacommissie, in zijn voorwoord van de syllabus. Heel aardig is dan ook dat de samenstellers van de syllabus dit jaar uit het jaarverslag van het Mathematisch Centrum van 1946 citeren.[1] Natuurlijk is een 65e keer een mijlpaal, met een mooi thema: Nieuwe Tijden. Daarin wordt direct de link gelegd naar het onderwijs, naar nieuwe examenprogramma's, maar ook naar nieuwe tijden in mathematisch onderzoek.

Het programma:

Welkom, Prof. Dr. J. Wiegerinck
Priem!, Prof. Dr. P. Levrie en Prof. Dr. R. Penne
Analytische Meetkunde, S. Wepster
Some basics of classical logic, drs. T. Achourioti
Honderd gevangenen en een gloeilamp, dr. H. van Ditmarsch, Prof. Dr. B. Kooi
De ontdekking van het Higgs-deeltje, dr. W. Verkerke
Practicum statistiek, Prof. Dr. M van de Wiel, dr. W. van Wieringen

Tja, nu kom ik direct bij een klein dilemma. Jan Wiegerinck meldde in zijn openingswoord dat hij de 68e vakantiecursus opende. Ik denk dat hij teveel in beslag genomen werd door de grote hoeveelheid mededelingen. Hij noemde o.a. het succes van de Wiskundeolympiade voor Nederland. Hij zette ook Jan van Maanen nog even in het zonnetje, omdat Jan vorig jaar voor de 25e keer deel uitmaakte van de programmacommissie.

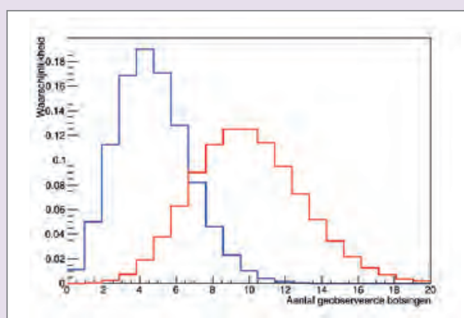
Bent u niet geweest? Dan hebt u echt wat gemist. De eerste lezing van Levrie en Penne was fantastisch. Twee Vlamingen die elkaar afwisselden tijdens de presentatie; het ging zo makkelijk dat het vanzelfsprekend leek hoe de taken en rolverdeling waren. Beide heren namen de tekst van de syllabus als uitgangspunt van hun verhaal. Ze maakten ook stiekem reclame voor hun nieuwe boek dat over priemgetallen gaat. Penne behandelde een stukje interessante geschiedenis van de getaltheorie. Wat heel goed was in hun presentatie, was de tijd die zij namen om samen met ons vervolgstappen te nemen op weg naar een mooi eind, zoals je tijdens een les een moment stilte neemt om leerlingen de tijd te geven om iets te leren en te reflecteren. Onderwerpen die allemaal nodig waren om het verhaal in de syllabus verder te verduidelijken, kwamen goed aan de orde. Zo maakten wij kennis met tovervierkanten, priemtweelingen en een sexy priempaar! Tijdens de lezing van Steven Wepster kwamen onderdelen van de nieuwe examenprogramma's voorbij. Eén aspect wil ik er in ieder geval uitlichten: Steven gaf aan dat het *Volkoomen Wiskundig Woordenboek* van Joan Levinus Stammetz gratis als *e-book* is te downloaden. Via een zoekmachine vind je dit boek vrij snel. Een andere aanrader is van Fermat: *ad locos planos et solidos isagoge*. Dit boekje bevat slechts acht pagina's.

Ook wil ik noemen de voordracht van Hans van Ditmarsch over Honderd gevangenen en één lamp:[2]

Een groep van 100 gevangenen, verzameld in de gevangeniskantine, wordt verteld dat ze allemaal in isolatiecellen worden geplaatst en daarna één voor één ondervraagd, in een kamer met een lamp met een schakelaar. De gevangenen kunnen met elkaar communiceren door de lamp aan of uit te doen (en dat is de enige manier waarop ze kunnen communiceren). De lamp is aan het begin uit. Er is geen vaste volgorde van ondervraging, er is geen standaard tijdsduur tussen de ondervragingen, en dezelfde gevangene kan best meerdere keren achter elkaar ondervraagd worden. We mogen wel aannemen dat op ieder moment iedere gevangene ooit nog eens ondervraagd zal worden. Als een gevangene ondervraagd wordt, kan deze: niets doen, de lamp uitdoen, de lamp aandoen, of verklaren dat iedereen (in ieder geval een keer) ondervraagd is. Als dit waar is, worden alle gevangenen vrijgelaten, Anders worden ze allemaal opgehangen. Kunnen de gevangenen zolang ze nog bij elkaar zijn in de kantine en niet naar de isolatiecellen gebracht zijn een protocol overeenkomen waardoor zij vrijgelaten worden?

Het enthousiasme waarmee Hans de verschillende oplosstrategieën toonde, was heerlijk. Een leuk probleem voor leerlingen. Ik ben zeker van plan dit probleem tijdens een les uit te delen. Om leerlingen te helpen zou je de tactiek die Hans ook aanreikte, kunnen gebruiken: Je begint met een gevangene. Als die ondervraagd is, heb je alle gevangenen gehad. Als je twee gevangenen hebt, is er een protocol nodig.
Stel, je hebt de gevangenen A en B. Als A ondervraagd wordt, doet A de lamp aan. Als A daarna nog een keer wordt ondervraagd, weet deze gevangene zeker dat B niet

ondervraagd is, anders waren ze al vrijgelaten. Als B na A ondervraagd wordt en ziet dat de lamp aan is, weet deze dat A ondervraagd is. Je krijgt dan het volgende protocol: Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit, doe hem dan aan. Als je ondervraagd wordt, en je hebt de lamp eerder aangedaan en de lamp is nog steeds aan, doe dan niets. Als je ondervraagd wordt, en de lamp is aan, maar jij hebt hem niet aangedaan, verklaar dan dat iedereen ondervraagd is. En zo kun je doorgaan...
Jammer dat er in Eindhoven geen boekenmarkt was, want bovenstaand probleem is in boekvorm verschenen bij Epsilon. Ik heb begrepen dat in Amsterdam heel wat bezoekers dit boek gekocht hebben.



figuur 1 Poissonverdeling van waarschijnlijkheden om het aantal geobserveerde LHC proton-proton botsingen met vier leptonen te observeren in twee jaar data onder hypothese dat het Higgs-deeltje niet bestaat (blauw) en dat het Higgs deeltje wel bestaat (rood).

Als laatste was ik erg onder de indruk van de lezing van Wouter Verkerke over de zoektocht naar het Higgs-deeltje. Het is duidelijk een natuurkundig verhaal, maar Wouter heeft er een wiskundig verhaal van gemaakt met veel mooie plaatjes via de site: *http://atlas.ch*
De binomiale verdeling wordt in de natuurkunde veel gebruikt, maar nog vaker gebruikt men de Poissonverdeling. Wouter liet zien dat experimenten met proton-protonbotsingen bij de *Large Hadron Collider* in Genève ingewikkelder zijn dan het trekken van knikkers uit een ton, maar in zijn eenvoudigste vorm wel erg vergelijkbaar. Wouter beschrijft het experiment en liet ook een afbeelding zien van de Poissonverdeling die hierbij hoorde, zie figuur 1.
Volgend jaar hoop ik weer een interessante vakantiecursus te bezoeken.

Noten

[1] De syllabus is te vinden op *www.platformwiskunde.nl/home_vakantiecursus_wiskunde.htm*. Hier vindt u ook de presentaties.
[2] Zie verderop in deze *Euclides* een bespreking van dit boek door Harm Bakker.

Over de auteur

Gert de Kleuver is penningmeester van de NVvW.
E-mailadres: *penningmeester@nvvw.nl*

VOORBEELDEN

Frans Ballering

Bij het introduceren van een nieuw begrip horen voorbeelden. Maar hoe pak je dat aan en hoeveel voorbeelden is genoeg? Frans Ballering geeft aanwijzingen en natuurlijk ook enkele voorbeelden.

Door voorbeelden te geven van een nieuw begrip, geven we leerlingen de gelegenheid om een weg te vinden van concreet naar abstract, van zaken die ze al kennen naar wiskunde. Voorbeelden horen dus in eerste instantie te worden geformuleerd in de taal van de leerling, ofwel zo concreet dat ze aansluiten bij wat hij al weet of kan. Hoeveel voorbeelden is genoeg? Dat hangt er maar vanaf hoezeer het begrip, dat we de leerlingen willen leren, aansluit bij hun alledaagse ervaringen.

Voorbeelden van voorbeelden

In de eerste klas introduceren we het begrip *vierkant*. We weten dat leerlingen al heel wat vierkanten hebben gezien en getekend in hun leven. We kunnen dus één vierkant tekenen als voorbeeld en daar direct al bij vragen wat er zo bijzonder is aan een vierkant, om zo toe te werken naar een definitie en/of kenmerken. Hier is één voorbeeld dus genoeg. Bij het begrip *hoek* ligt dat totaal anders. Het wiskundige begrip hoek sluit van geen kant aan bij het alledaagse begrip dat leerlingen meebrengen. Met name de hoek van de straat en de hoek van het lokaal lijken (voor de wiskundeles) nergens op. Breng dat maar eens bij elkaar... Wat moet een leerling halen uit de voorbeelden van ons begrip hoek? Ten eerste dat hij bestaat uit twee lijnstukken, ten tweede dat het gaat om de 'ruimte ertussen' en ten derde dat de lengte van die lijnen (ik bedoel lijnstukken) er niet toe doet. Als ik dat bedenk, dan zie ik ook dat deze zaken in de straathoek niet gemakkelijk te herkennen zijn. Maar in de hoek van het biljart misschien wel, alleen is die altijd recht. (Waarom zijn er zoveel hoeken recht?) Het bedenken van mooie voorbeelden gaat dus niet altijd vanzelf. Is het niet tijd voor een Groot Voorbeeldenboek der Nederlandse Wiskunde? Voor het begrip hoek kan de brandweerladder daarin. Waarom is dat zo'n mooi voorbeeld? Er is geen storende muur waar andere ladders altijd tegenaan staan, waardoor de driehoek die je dan ziet, afleidt van de hoek. En hij kan in verschillende standen. De toren van Pisa kan er ook mee door als voorbeeld. Maar die wordt tegenwoordig niet meer schever, dus heeft maar één stand. De klassieke wijzers van de klok doen het gelukkig altijd. Ik zie daarna graag knip- en plakwerk. Laat elke leerling na enkele voorbeelden zelf een hoek uitknippen. Ik krijg dan meteen vijfentwintig verschillende en kan de aandacht vestigen op de genoemde eigenschappen. En bij het meten kan ik ze weer gebruiken.

Non-voorbeelden

Als ik leerlingen voorbeelden laat geven, krijg ik met wat geluk ook non-voorbeelden en bijna-voorbeelden. Die zijn soms nodig om het begrip af te grenzen. Slordig geknipte hoeken zijn toch geen hoeken? En is jouw hoek niet eigenlijk een driehoek? Bij het begrip lijn is een kronkeltje of kromme een goed non-voorbeeld, dat nodig is, omdat we buiten het lokaal zoiets wel rustig een lijn noemen. Zouden we binnen de wiskunde consequent van een rechte lijn spreken, dan is dit niet nodig, maar volgens mij houd ik dat niet vol. Waarmee ik me realiseer dat ik ook niet altijd even duidelijk ben: uit de context moet maar blijken of ik het over een rechte lijn heb of over een kromme. Als het begrip goed zit, is een leerling meestal in staat om zelf voorbeelden te tekenen. Van het vierkant weten we dat. 'Verzin allemaal een voorbeeld' of 'teken allemaal een voorbeeld' zou een vaste activiteit bij uitleggen moeten zijn. Het levert een controle op (hebben ze het te pakken?) en het levert non-voorbeelden op (de puntjes op de i). Met de non-voorbeelden én de voorbeelden helpen we de leerlingen die 'het begrip nog niet (helemaal) te pakken hebben' over de streep.

Variatie in voorbeelden

Omdat de leerlingen zoveel rechte hoeken tegenkomen, moeten voorbeelden van hoeken vaak juist niet recht zijn, maar ook voldoende vaak wel, zodat duidelijk wordt dat ook een rechte hoek erbij hoort. En het hoekpunt moet niet in elk voorbeeld naar links wijzen, zoals mij overkomt als ik daar niet op let. Ook rechte hoeken moeten scheef staan en de hoekpunten alle kanten op. (Recht en loodrecht liggen voor leerlingen toch al zo dicht bij elkaar.) Uiteindelijk moet natuurlijk ook de gestrekte hoek. Dat zou je hier een extreem voorbeeld kunnen noemen, als maar duidelijk is waar het hoekpunt ligt. En ook de hoeken van 0 en 360 graden, maar die lijken pas na het meten meer op zijn plaats. Zulke voorbeelden maken (extreem) duidelijk waar het bij het hoekbegrip om gaat.

Nog meer voorbeelden

Wat zijn termen? Wat zijn factoren? Dit zijn moeilijke vragen. Een goede omschrijving van deze eenvoudige begrippen valt zelfs voor de leraar niet mee en het is zeer de vraag of een leerling bij zo'n definitie kan meedenken en begrijpen. Maar vraag eens: kun je voorbeelden geven? Als een leerling een voorbeeld kan geven, weet ik voldoende en als hij dat niet kan ook. Vragen naar voorbeelden geeft de leraar sloten aan informatie over het denken van leerlingen.

Literatuur

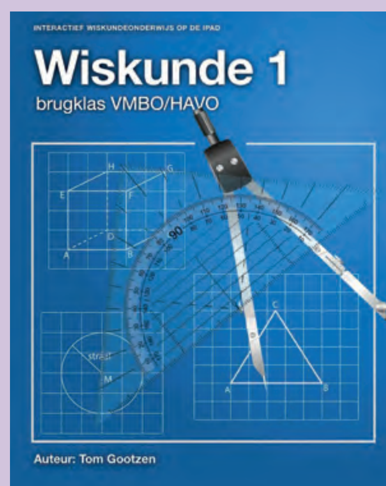
Faas, T., e.a. (2011). *Het leren van wiskunde.* Utrecht: APS.

Over de auteur

Frans Ballering heeft zes jaar gewerkt als wiskundeleraar op mavo, havo en vwo en daarna dertig jaar op de tweedegraads lerarenopleiding. Sinds 1 september 2010 is hij met pensioen. E-mailadres: *fransballering@hetnet.nl*

VERSCHENEN

WISKUNDE 1



Ondertitel: brugklas VMBO/HAVO
Auteur: Tom Gootzen
Uitgever: TGdesign (2014)
Prijs: € 15,99 (285 pagina's; digitaal)
Beschikbaar op iPad en Mac

Omschrijving

Dit wiskundeboek is een digitaal interactief boek over verschillende onderwerpen binnen het vak wiskunde voor de brugklas vmbo-havo. Aan bod komen: vlakke- en ruimtefiguren; assenstelsel en grafieken; de geodriehoek en hoeken; negatieve getallen; omtrek en oppervlakte; symmetrie; rekenen met breuken en procenten. Het is een **interactieve methode** voor gebruik op de **iPad**. De interactiviteit komt terug in de herkenbaarheid van de thema's, de opdrachten, informatie-*pop-ups* tussendoor en de **113** interactieve *widgets*.

VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



Aº 1930

Deze keer een compleet examen (trigonometrie en analytische meetkunde) uit 1930. De eerste opgave is mooi echte uitdagende goniometrie. De gegevens zijn kort maar krachtig, maar ook het pakket goniometrieformules kan worden aangesproken. In de opgave wordt de traditionele naamgeving gebruikt waarbij hoekpunten worden aangegeven met een hoofdletter, en de lengte van de zijde tegenover zo'n hoek met de kleine letter. Zo is de lengte van de zijde tegenover hoek A gelijk aan a. De tweede opgave is standaard, mag geen probleem zijn voor onze leerlingen in het nieuwe wiskunde B-programma vanaf 2015. De derde opgave test de kennis van het formulewerk in de analytische meetkunde. Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Verderop treft u mijn uitwerking aan.

Opgave 1
Bereken van driehoek ABC de hoeken als gegeven is:
1. $a^2 = bc$
2. $\cos(B - C) = \frac{1}{8}$.

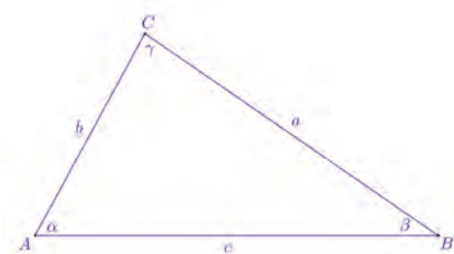
Opgave 2
Gegeven de parabool $y^2 = 4x$. Men vraagt de vergelijking

van een raaklijn wier afstand tot de top $\frac{16}{15}$ is.

Opgave 3
Van driehoek ABC is de basis $AB = c$ in ligging en grootte gegeven. Bepaal de meetkundige plaats van de top C als het hoogtepunt H de hoogtelijn CD verdeelt in stukken CH en HD zodanig, dat $CH : HD = 2 : 1$.

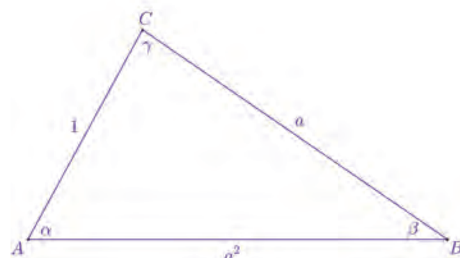
Opgave 1

Een werkschets



Een eerste inventarisatie
- het eerste gegeven zou op de cosinus- of sinusregel kunnen wijzen;
- het tweede gegeven wijst richting de somformule $\cos(\beta - \gamma) = \cos(\beta)\cdot\cos(\gamma) + \sin(\beta)\cdot\sin(\gamma)$;
- geprobeerd kan worden uit de gegevens een vergelijking af te leiden met één onbekende.

Nu in meer detail
Stel $b = 1$, dan verandert het eerste gegeven in $c = a^2$, zodat de tekening wordt:



De cosinusregel geeft:
(1)... $a^2 = 1 + a^4 - 2a^2\cos(\alpha)$; $\cos(\alpha) = \dfrac{a^4 - a^2 + 1}{2a^2}$

(2)... $1 = a^2 + a^4 - 2a^3\cos(\beta)$; $\cos(\beta) = \dfrac{a^4 + a^2 - 1}{2a^3}$

(3)... $a^4 = 1 + a^2 - 2a\cos(\gamma)$; $\cos(\gamma) = \dfrac{-a^4 + a^2 + 1}{2a}$

De hoekensom van de driehoek levert:
(4)... $\cos(\beta + \gamma) = \cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$
Een gonio-somformule geeft: $\cos(\beta + \gamma) = \cos(\beta)\cdot\cos(\gamma) - \sin(\beta)\cdot\sin(\gamma)$. Samen levert dit op:
(5)... $-\cos(\alpha) = \cos(\beta)\cdot\cos(\gamma) - \sin(\beta)\cdot\sin(\gamma)$
Waarnaast natuurlijk in het algemeen geldt:
(6)... $\cos(\beta - \gamma) = \cos(\beta)\cdot\cos(\gamma) + \sin(\beta)\cdot\sin(\gamma)$

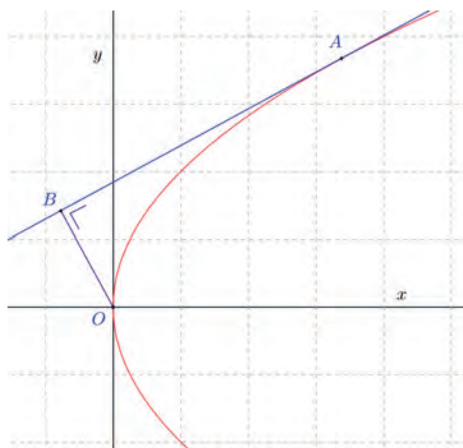
Tellen we (5) en (6) op, en gebruiken we (4) en het tweede gegeven, dan krijgen we:
$2\cos(\beta)\cdot\cos(\gamma) = \cos(\beta - \gamma) - \cos(\alpha) = \frac{1}{8} - \cos(\alpha)$.

En nu vullen we hier de drie cosinusregelresultaten (1), (2) en (3) in:

$$2 \cdot \frac{a^4 + a^2 - 1}{2a^3} \cdot \frac{-a^4 + a^2 + 1}{2a} = \frac{1}{8} - \frac{a^4 - a^2 + 1}{2a^2}$$

En hieruit kan a worden opgelost. Herleiding geeft $4a^8 - 4a^6 - 7a^4 - 4a^2 + 4 = 0$. Substitueer $a^2 = p$: $4p^4 - 4p^3 - 7p^2 - 4p + 4 = 0$. Dit is een speciale vergelijking: wanneer je p vervangt door $\frac{1}{p}$, krijg je dezelfde vergelijking! Dus wanneer je één positieve oplossing hebt (ongelijk aan 1), heb je er gelijk twee. Proberen geeft als oplossing $p = 2$, en dan zegt de factorstelling dat het linkerlid deelbaar is door $p - 2$ en door $2p - 1$. Uitdelen geeft dan de ontbinding $(p - 2)(2p - 1)(2p^2 + 3p + 2) = 0$. De derde factor heeft geen reële wortels, dus zijn de enige twee uitkomsten $p = 2$ of $p = ½$, waaruit volgt $a = \sqrt{2}$ of $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
Waaruit de hoekgroottes volgen: $\alpha = 41{,}4096° = 41°24'35''$, $\beta = 27{,}8856° = 27°53'8''$, $\gamma = 110{,}7048° = 110°42'17''$. Of $\alpha = 41{,}4096° = 41°24'35''$, $\gamma = 27{,}8856° = 27°53'8''$, $\beta = 110{,}7048° = 110°42'17''$.

Opgave 2



Een werkschets

Eerlijk delen
Op de HBS in de zestiger jaren van de vorige eeuw kreeg ik de regel van het 'eerlijk delen', waarmee van een kegelsnede de raaklijn kon worden bepaald:
Kegelsnede: $ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ en raakpunt (x_1, y_1) geeft raaklijn $a \cdot x_1 \cdot x + ½bx_1 + ½bx + c \cdot y_1 \cdot y + ½dy_1 + ½dy + e = 0$. De afstandsformule van een punt (p,q) tot de lijn $ax + by + c = 0$: afstand $= \dfrac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

De uitwerking
Bij de gegeven parabool is de raaklijnvergelijking $y_1 \cdot y = 2x + 2x_1$, oftewel $2x - y_1 \cdot y + 2x_1 = 0$. Passen wij bovenstaand formulewerk toe op de raaklijn AB en punt (0,0), dan krijgen we $\dfrac{2x_1}{\sqrt{4 + y_1^2}} = \dfrac{16}{15}$ (absoluutstrepen mogen weg, immers $x_1 > 0$). Omdat tevens $y_1^2 = 4x_1$, geldt dus $\dfrac{2x_1}{\sqrt{4 + 4x_1}} = \dfrac{16}{15}$ dat kan worden herleid tot $15x_1 = 16\sqrt{1 + x_1}$. Kwadrateren geeft

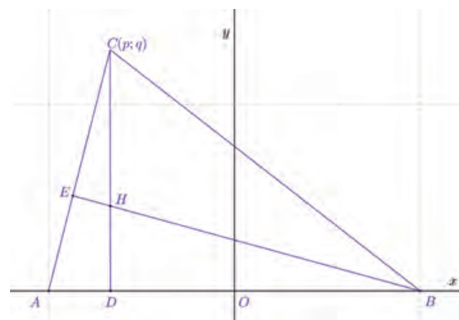
$$225x_1^2 = 256 + 256x_1$$

Deze kwadratische vergelijking heeft oplossingen $x_1 = \frac{16}{25}$ of $x_1 = \frac{8}{3}$, waarvan de eerste vervalt *na controle* (kwadrateren, dus controleren!). Dit geeft als mogelijke raakpunten $(\frac{16}{9}; \frac{8}{3})$ en $(\frac{16}{9}; -\frac{8}{3})$ en raaklijnen $y = \frac{3}{4}x + \frac{4}{3}$ en $y = -\frac{3}{4}x - \frac{4}{3}$.

Opmerking
Het kan ook zonder eerlijk delen:
Stel de raaklijnvergelijking is $ax + by + c = 0$, waarbij $x = \frac{1}{4}y^2$ kan worden gesubstitueerd; we krijgen $\frac{a}{4}y^2 + by + c = 0$, waarvan de discriminant gelijk moet zijn aan 0, waaruit volgt: $b^2 = ac$.
De afstandsformule van punt (0,0) tot deze raaklijn geeft $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{16}{15}$ waarna (na eliminatie van b en herleiding) volgt $15|c| = 16\sqrt{a^2 + ac}$, hetgeen na kwadrateren overgaat in $256a^2 + 256ac - 225c^2 = 0$ waaruit de waarde van $\frac{a}{c}$ kan worden bepaald, enzovoort.

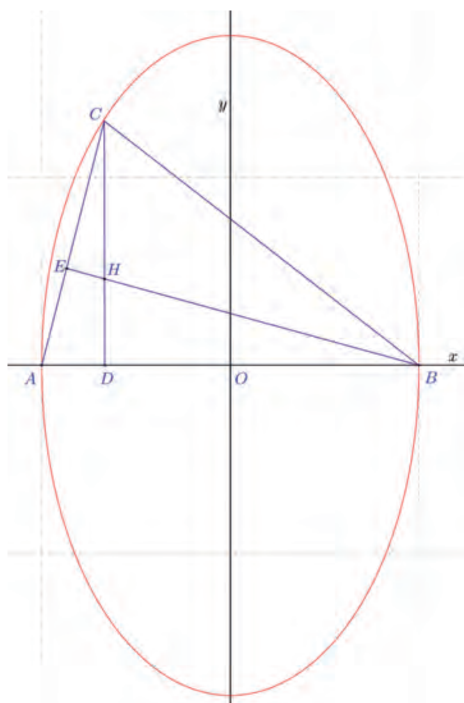
Opgave 3

Een werkschets



We kiezen een geschikt assenstelsel, bijvoorbeeld de x-as door A en B, en de middelloodlijn van AB als y-as. Stel $A = (-½c; 0)$, $B = (½c; 0)$ en $C = (p; q)$.

De uitwerking
Een vergelijking van AC: $y = \dfrac{q}{p + \frac{1}{2}c}(x + \frac{1}{2}c)$,



dus is een vergelijking van BE:

$$y = -\frac{p + \frac{1}{2}c}{q}\left(x - \frac{1}{2}c\right).$$ $x_H = p$ invullen in BE geeft:

$$y_H = -\frac{p + \frac{1}{2}c}{q}\left(p - \frac{1}{2}c\right) = \frac{\frac{1}{4}c^2 - p^2}{q}.$$

Gegeven: $CH = p - \dfrac{\frac{1}{4}c^2 - p^2}{q} = \frac{2}{3}q$, waaruit volgt:

$3p^2 + q^2 = \frac{3}{4}c^2$, dus is een vergelijking van de

meetkundige plaats van punt C: $3x^2 + y^2 = \frac{3}{4}c^2$. Dit is een ellips.

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958).* Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

VASTGEROEST

Ab van der Roest

GOED OF FOUT?

Bij het nakijken van eindexamens blijkt Ab van der Roest toch niet zo rechtlijnig als hij denkt. Hij deelt zijn gedachten daarover met u.

Wiskundedocenten zijn in het algemeen vriendelijke mensen; streng doch rechtvaardig. Meesters in het binair denken; en beoordelen of een antwoord goed of fout is, dat is voor hen geen groot probleem. Het is sowieso gemakkelijk bij wiskundeopgaven: goed-fout en wat zou er tussen in moeten zitten? Dit is een beeld dat buitenstaanders kunnen hebben, en dat we zeker in stand moeten houden. Maar als ik examens nakijk, of als tweede corrector examens bekijk, dan is er een voortdurende strijd tussen het vriendelijke en het rechtvaardige. Opeens ben ik niet zo binair meer.

Ik geef een paar voorbeelden: In de vakspecifieke regels van het correctievoorschrift (cv) staat bij regel 1 dat voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening één punt afgetrokken moet worden. Duidelijke taal, maar hoeveel moeite kost het mij, en niet alleen mij, niet om een leerling een punt in mindering te brengen die op een plaats in de berekening opeens een cijfer verwisselt:

$g = \left(\frac{20}{12}\right)^{\frac{1}{8}} = 1{,}0695$ dus 6,6%. Bij het tussenantwoord zijn de 5 en 9 verwisseld. Even niet opgelet bij het schrijven, of lezen, maar wiskundig alles goed! Het cv is duidelijk; de docent twijfelt, maar moet vanwege het rechtvaardig zijn de punt aftrekken. In ditzelfde kader worstel ik altijd met de normering als een leerling bij een integraal 'dx' vergeet. Er wordt een wiskundige notatiefout gemaakt en in het kader van regel 1 trek ik een punt af. Maar als tweede corrector zie ik nog al eens dat ik strenger ben dan mijn collega.

Een heel ander voorbeeld waar het cv wel ruimte laat: in mijn lessen over de normale verdeling hamer ik erop dat ik de wiskundetaal en de GR-taal gescheiden wil houden. Bij een toets voor het schoolexamen ben ik daar ook fel op en geef ik punten in mindering als een leerling dat niet doet. Ik wil dus niet dat een leerling opschrijft: $P(X \geq 3) = normalcdf(3.0,10^{99},1.45,0.533) = 0{,}0025$. Een uitwerking die ik de leerlingen leer, en waarvan ik zeg dat alleen die manier alle punten scoren is:

X = de reticulocytwaarde;
X is normaal verdeeld met $\mu = 1{,}45$ en $\sigma = 0{,}553$;
$P(X \geq 3) = 0{,}0025$;
met behulp van GR: $normalcdf(3.0,10^{99},1.45,0.533)$.

Maar een leerling die bij het examen alleen opschrijft $normalcdf(3.0,10^{99},1.45,0.533) = 0{,}0025$ krijgt toch van mij, en ook van de tweede corrector alle punten! Waarom toch, vraag ik mezelf vaak af. Het antwoord weet ik voor mezelf. De leerling leert niets meer van het examen en daarom is het niet nodig om punten af te trekken. Of, bijna elke collega in het land trekt er geen punten voor af, en waarom zal ik dat dan wel doen?

Beide motieven vind ik niet sterk van mezelf. Belangrijkste motief is dat je jouw leerling niet tekort wilt doen. Het is nodig dat er een standaard komt als het gaat om uitwerken van kans-opgaven. Op havo en vwo wordt eerst de stochast gedefinieerd, eventueel een schets gemaakt en het antwoord begint standaard met $P(X\ldots)$. Een beschrijving van hoe de GR wordt ingezet, wordt als toelichting na het antwoord gegeven. Wiskunde is heldere denkstappen maken en opschrijven!

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

REACTIE

In *Euclides* nummer 1 besprak Ruud Stolwijk het vwo wiskunde B eindexamen. Bij de tweede opgave, *Boven en onder de lijn door de buigpunten*, stelde hij een interessante vraag. Samengevat: 'levert een lijn door de buigpunten van een vierdegraadsfuncties altijd een situatie op waarbij twee van de drie ingesloten oppervlakten samen gelijk zijn aan de derde.' Sjoerd Zondervan reageerde en u vindt zijn uitwerking van de situatie op onze website.

 *vakbladeuclides.nl/903zondervan*



BOEKBESPREKING

KANTELPUNTEN EN ALTERNATIEVE EVENWICHTEN

Adri Dierdorp



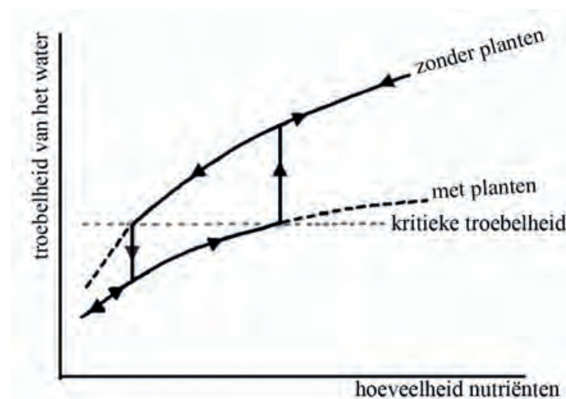
Auteurs: Lia Hemerik, Egbert van Nes en Theo-Jan van de Pol
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2014), Zebra 40
ISBN: 978-90-5041-142-4
Prijs: € 10,00 (60 pagina's; paperback)

In deze boekbespreking aandacht voor het veertigste deel uit de Zebrareeks: *Kantelpunten en alternatieve evenwichten*. De Zebrareeks is bedoeld voor vwo-leerlingen en iedereen die belangstelling heeft voor wiskundige toepassingen. De auteurs van dit deeltje, Hemerik, Van Nes en Van de Pol, zijn erin geslaagd om aan deze doelgroep op een interessante en toegankelijke manier kantelpunten en evenwichten met betrekking tot de theorie van differentiaalvergelijkingen uit te leggen.

Hoewel de titel anders doet vermoeden, komt het woord 'kantelpunt' nauwelijks in het boek voor. In de inleiding leggen de auteurs uit dat een kantelpunt het punt is waarbij ineens een groot effect optreedt, waarna je naar een ander (alternatief) evenwicht gaat. Vanaf dat moment spreken zij in het boekje meestal van *bifurcatiepunt*.

Aan het woord *bifurcatie* zelf wordt weinig aandacht besteed. Dat is een gemiste kans. Het is in 1885 geïntroduceerd door Henri Poincaré (1854-1912), de grootste Franse wiskundige.[1] Hij publiceerde in het tijdschrift *Acta Mathematica* zijn artikel *L'Équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, waar het begrip *Equilibre de bifurcatio*' in de tweede paragraaf al wordt besproken. Volgens Wikipedia wordt de bifurcatietheorie ook wel chaostheorie genoemd. Of beide theorieën geheel identiek zijn, is de vraag, maar de raakvlakken zijn evident.

De auteurs hebben er voor gekozen niet uitvoerig in te gaan op geschiedenis en theorie, maar vooral aan de hand van voorbeelden de leerling steeds dieper in de stof te laten duiken. Eén van de eerste voorbeelden betreft het dynamische systeem van watervervuiling en de rol van waterplanten. Planten houden het water helder. Door vervuiling (meer nutriënten) kan het echter zo troebel worden (kritieke troebelheid) dat de waterplanten dreigen af te sterven. Dan treedt een systeem zonder waterplanten in werking. Dit leidt tot nog troebeler water. De grafiek, zie figuur 1, laat zien dat je in het systeem kan variëren van richting en dat je kantelpunten (bifurcatiepunten) krijgt op het moment dat de kritieke troebelheid wordt bereikt.



figuur 1 Naar figuur 1.3 uit het Zebraboekje

Na een paar voorbeelden wordt de leerlingen eerst de mogelijkheid geboden om hun relevante wiskundige kennis van het differentiëren op te frissen. De auteurs verwijzen ook naar een bijlage waar in vogelvlucht het differentiëren opnieuw wordt behandeld. Daarna wordt aan de hand van geslaagde voorbeelden snel de stap gemaakt naar de formele schrijfwijze van differentiaalvergelijkingen.
Het boek gaat, zoals de titel al deed vermoeden, niet over het oplossen van differentiaalvergelijkingen, maar over de kantelpunten en (alternatieve) evenwichten, wat goed aansluit bij het proefschrift van Poincaré. Daarin is weliswaar sprake van differentiaalvergelijkingen, maar het oplossen ervan is evenmin de focus.[2]

De auteurs behandelen vier verschillende grafieken:

- tijdplaatje (het verloop van de toestandsvariabele door de tijd heen);
- lijnelementenveld (afgeleide van de toestandsvariabele naar de tijd);
- groeiplaatje (groeisnelheid afhankelijk van de toestandsvariabele);
- bifurcatieplaatje (stabiele en instabiele evenwichten).

Op enkele voorbeelden na (bijvoorbeeld economie), worden de vier genoemde grafieken vooral uitvoerig gebruikt bij het oplossen van allerlei natuurwetenschappelijke problemen, zoals bijvoorbeeld de interactie tussen groenalgen en watervlooien (biologie), de lamp versus laserwerking (natuurkunde), of een voorbeeld uit de epidemiologie over de verspreiding van infectieziekten (biologie). Aan het eind van het eerste hoofdstuk nemen de differentiaalvergelijkingen al tamelijk ingewikkelde vormen aan. Zonder ze uitvoerig te behandelen - het gaat mij alleen om de vorm (lees het boekje maar) - geef ik het voorbeeld van de auteurs over de activiteiten van mieren:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dj}{d+E}\left(fA^2 + gA + n^2\right)\left(n - A\right) - hA$$

Aan de hand van de verschillende grafieken voor deze differentiaalvergelijking moeten de leerlingen allerlei effecten beredeneren. Bijvoorbeeld: 'Wat gebeurt er met het aantal actieve mieren als het energieniveau langzaam afneemt?'

In het tweede korte hoofdstuk kunnen de leerlingen oefenen met voorbeelden. Soms vermelden de auteurs ook expliciet de disciplines waaruit ze hebben geput bij het kiezen van hun voorbeelden:

- meer realistische modellen voor begrazing (biologie);
- percentage vrouwelijke hoogleraren op een universiteit (maatschappijwetenschappen);
- dichterlijke liefdesperikelen met twaalf toestandsvariabelen en parameters (sociologie).

Hoewel dit boek in eerste instantie is geschreven voor het wiskundeonderwijs, sluit het mijn inziens ook goed aan bij het schoolvak Natuur, Leven en Technologie (NLT). De interdisciplinariteit, de voorbeelden uit verschillende disciplines waardoor leerlingen een (beter) beeld krijgen van mogelijke vervolgstudies, en de rol van wiskunde sluiten goed aan bij NLT. Van de NLT-doelen ontbreekt alleen technologie, maar die komt zijdelings ook aan de orde door het gebruik van allerlei computertoepassingen. Een ander positief punt is dat het boek een scala aan mogelijkheden biedt voor de zogenaamde wiskundige denkactiviteiten. De commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) formuleerde in haar eindrapport van 2012 *Denken & doen; wiskunde op havo en vwo per 2015*[3] dat wiskundige denkactiviteiten als een rode draad door alle wiskundevakken nodig zijn. Het betreft:

- modelleren en algebraïseren;
- ordenen en structureren;
- analytisch en probleemoplossend denken;
- formules manipuleren;
- abstraheren;
- logisch redeneren en bewijzen.

Deze denkactiviteiten worden tegenwoordig in allerlei cursussen behandeld; voor meer informatie verwijs ik naar het cTWO-rapport of naar het in 2012 verschenen *Handboek wiskundedidactiek* van Drijvers, Van Streun en Zwaneveld. Ook is een groep didactici bezig om de denkactiviteiten nader te specificeren en onderverdelingen te maken. Dit boek legt bij de opgaven vooral de nadruk op de denkactiviteiten abstraheren, formules manipuleren en modelleren. Leerlingen moeten bijvoorbeeld regelmatig redeneren aan de hand van de afgeleide (abstraheren, opgave 1.9) en formules herschrijven (formules manipuleren, opgave 10b), of zelf een differentiaalvergelijking opstellen of aanpassen (modelleren, opgave 1.25). Als voorbeeld noem ik de opgave waarbij de leerlingen aan de hand van de bovenstaande differentiaalvergelijking over de activiteiten van mieren, moeten aantonen dat voor het verband tussen E en het evenwicht $\hat{A}$ geldt:

$$E = \frac{dj}{h\hat{A}}\left(f\hat{A} + g\hat{A} + n^2\right)\left(n - \hat{A}\right) - d$$

Concluderend kan worden gesteld dat *Kantelpunten en alternatieve evenwichten* een zeer geslaagde poging is om leerlingen kennis te laten maken met en te betrekken bij de verschillende wiskundige denkactiviteiten. Jammer is dat de auteurs ervoor hebben gekozen slechts een selectie, in plaats van alle antwoorden van de opgaven op te nemen, maar dat is een bijkomstigheid. Ik zou iedere wiskundedocent van harte willen aanraden om snel met dit boek aan de slag te gaan.

'KANTELPUNTEN EN ALTERNATIEVE EVENWICHTEN: EEN AANRADER'

Noten

[1] Zie: Struik, *Geschiedenis van de wiskunde*, p. 229
[2] Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics.* Wiley.
[3] Zie *www.fisme.science.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf*

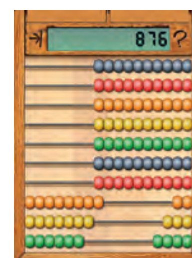
Over de recensent:

Adri Dierdorp is sinds 1986 wiskundedocent op het categoraal atheneum College Hageveld te Heemstede en promoveerde daarnaast in 2013 aan het Freudenthal Instituut met het proefschrift *Learning correlation and regression within authentic contexts.* E-mailadres: *a.dierdorp@uu.nl*

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

Lonneke Boels

WISKUNDETRUCS - MATHEMAGICS



Dit keer adviseert Lonneke Boels een spel dat heel geschikt is om in de kerstvakantie uit te proberen en er daarna leerlingen mee te verrassen: het spel met allerlei rekentrucs.



Een onderdeel van dit spel is getallen van twee cijfers tot 19 vermenigvuldigen met een ander getal van twee cijfers tot 19. In het spel zit een *learn mode* waarin de methode wordt uitgelegd en een *practice mode* waarin je kunt oefenen. Bij de *play mode* kun je kiezen welke trucs door elkaar gevraagd worden. Daarin kun je het jezelf dus moeilijker of makkelijker maken. Als je het rekendictee van Bartjens[1] tot nu toe niet kon winnen, dan gaat het na het oefenen van deze trucs vast wel lukken. Overigens zou ik het spel zelf eerder 'leren snelrekenen' willen noemen, maar *Magische Trucs* klinkt waarschijnlijk beter.

Veel van de 'trucs' kreeg ik zelf vroeger van de meester in de zesde klas op de basisschool. Tegenwoordig heet dat handig rekenen. Zo kan ik me de 'truc' van het kwadrateren van een getal dat eindigt op een 5 nog goed herinneren. De 'truc' die mijn meester me niet leerde, is het verdubbelen/halveren bij vermenigvuldigen (bij delen kan ook, maar dan werkt hij anders) die ik inmiddels heel veel gebruik. Speciaal voor ons docenten zonder rekenmachine staat er de fascinerende *negenproef* die mijn meester op de basisschool vroeger beheerste. Met deze negenproef kun je snel beoordelen of de uitkomst van een vermenigvuldiging een fout bevat (niet of hij goed is, zie ook [2]). Bij deze *app* staan er zelfs vier varianten van deze negenproef. Kijk maar bij *casting out nines*. Een aantal van de 'trucs' zouden eigenlijk tot het standaardrepertoire van leerlingen moeten behoren. Denk bijvoorbeeld aan verdubbelen/halveren, kwadrateren van getallen, regels voor vermenigvuldigen met bijvoorbeeld 4 of 8 of regels voor deelbaarheid door 4 of 8, enzovoort. Dankzij deze *app* kunnen docent en leerling uitzoeken in hoeverre dat zo is.

Pluspunten

- de *app* bevat ruim zestig 'trucs' zodat je echt wel een vakantie bezig bent;
- het is een leuke uitbreiding voor wie al goed is in rekenen;
- sommige 'trucs' zijn een echte uitdaging;
- je kunt op niveau oefenen door alleen één methode te kiezen (*practice*) of enkele methoden tegelijk (*play*);
- op hun website kun je zien welke methoden allemaal in de *app* zitten;
- bij sommige opgaven van de rekentoets kun je deze methode ook inzetten naast standaardoplossingsmethoden, bijvoorbeeld als controlemiddel;
- de rekensnelheid en het getalinzicht van leerlingen gaan omhoog;
- de methoden variëren van vrij gemakkelijk (deelbaar door 4) tot erg lastig (elfproef);
- bij *play* kun je kiezen uit een *Zen mode* en een *race the clock*.

Minpunten

- er staat niet uitgelegd waarom de 'truc' werkt; dat biedt dan wel weer de gelegenheid om leerlingen te laten uitpuzzelen waarom het mag;
- de vormgeving is erg eenvoudig en een beetje saai;
- het is geen spel en het is in het Engels;
- sommige 'trucs' zijn erg geavanceerd en van weinig praktisch nut.

Geschikt voor: basisschool groep 5, 6, 7, 8, vmbo, havo en vwo, mits Engels wordt beheerst of de docent het vertaalt
Eindoordeel: aanschaffen
Kosten: € 2,69
Getest op: iPad met iOS7.
Meer informatie:
www.bluelightninglabs.com/mathemagics-mmt

Noten

[1] *www.bartjensrekendictee.nl*
[2] Kool, M., & Moor, E. de (2009). *Rekenen is leuker* **als** *je denkt.* Uitgeverij Bert Bakker. Blz. 169-170.

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo's. E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

BOEKBESPREKING



Harm Bakker

HONDERD GEVANGENEN EN EEN GLOEILAMP



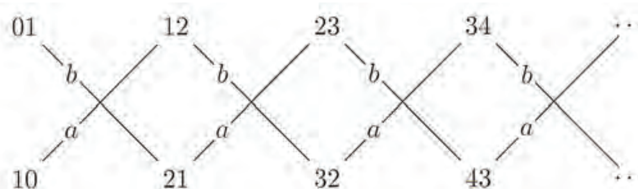
Auteurs: Hans van Ditmarsch en Barteld Kooi
Epsilon Uitgaven (73), Utrecht (2013)
ISBN 978-90-5041-132-5
Prijs: € 20,00 (100 pagina's; paperback)

Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen van 2007 hield Hans van Ditmarsch, één van de auteurs van dit boekje, een voordracht over logische puzzels. Aan het eind van zijn workshop presenteerde hij een puzzel waaraan het boekje de titel ontleent. Al direct na afloop, maar ook in de weken daarna, kreeg hij diverse reacties. En daarmee lijkt de vraag aan het begin van het voorwoord voor behoorlijk wat leraren wiskunde retorisch: 'Wie puzzelt er niet graag op zijn tijd?'

In elk van de negen hoofdstukken wordt steeds een puzzel beschreven. Wie direct na die beschrijving doorleest, doet zichzelf tekort. Dan ben je er in één zondagmiddag doorheen. Weliswaar een aangename middag, maar je kunt er aanzienlijk meer plezier aan beleven als je eerst zelf probeert de oplossing te vinden. En dat zal niet altijd meevallen. Maar er valt gelukkig ook veel te leren.

Nu zijn er allerlei soorten logische puzzels. De hier behandelde puzzels beschrijven scènes waarin een aantal personen een rol speelt. Om de oplossing te vinden, moet je redeneren over wat alle acteurs weten en over hoe hun kennis verandert door wat er (openbaar) wordt gecommuniceerd. Als bijvoorbeeld bekend is dat Anna het product van twee (geheime) positieve gehele getallen kent en zij doet de mededeling dat zij niet weet welke twee getallen dat zijn, dan weet iedereen daarna dat deze getallen niet beide priem zijn. Hieruit blijkt ook al, dat er vanuit wordt gegaan dat alle deelnemers perfect en compleet redeneren.

De tak van de logica die zich bezighoudt met het modelleren van kennis en weten wordt *epistemische* logica genoemd. En als ook het veranderen van kennis in het model wordt opgenomen, dan spreken we van *dynamische epistemische* logica. Bij de puzzels die zich er voor lenen, worden elementaire grafische technieken uit dit vakgebied gebruikt om de oplossing te vinden. Zo elementair en helder beschreven dat je aan het eind denkt: waarom heb ik dat zelf niet bedacht? Maar dat zal een gevolg zijn van de didactische vaardigheden van deze auteurs. Als je in hoofdstuk 1 een beetje vertrouwd bent geworden met deze manier van werken, dan helpt je dat bij een aantal volgende puzzels flink in de goede richting.



figuur 1 Het schema dat gebruikt wordt bij het oplossen van de eerste puzzel

Na de presentatie van een puzzel volgt steeds een uitgebreide bespreking. De eerste gedachte blijkt toch wel heel vaak niet de juiste. Aan de hand van scenario's wordt dat duidelijk gemaakt. De auteurs helpen de lezer vervolgens in de goede richting door middel van tussenpuzzels: vereenvoudigde versies van het probleem. Op die manier komen we dan uiteindelijk uit bij de correcte oplossing. Na deze uitwerking volgt dan een aantal varianten van de puzzel. Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een paragraaf waarin een poging wordt gedaan de herkomst te beschrijven. In de appendix worden de oplossingen gegeven van de tussenpuzzels. Een uitgebreide referentielijst sluit het boek af.

Tot zover een globale impressie. Iedereen die zich wel eens bezig heeft gehouden met dit soort logische puzzels komt vast wel bekenden tegen. Maar waarschijnlijk ook

A zegt tot S en P: Ik heb twee gehele getallen x, y gekozen met $1 < x < y$ en $x + y \leq 100$. Straks deel ik $s = x + y$ aan S alleen mee, en $p = xy$ aan P alleen. Deze mededelingen blijven geheim. Maar jullie moeten je inspannen om het paar (x, y) uit te rekenen.
Hij doet zoals aangekondigd. Nu volgt dit gesprek:

1. *P zegt: Ik weet het niet.*
2. *S zegt: Dat wist ik al.*
3. *P zegt: Nu weet ik het.*
4. *S zegt: Nu weet ik het ook.*

Bepaal het paar (x, y).

figuur 2 De tekst van de puzzel *Som en product*

wel een aantal onbekenden. In ieder geval zullen veel lezers niet vertrouwd zijn met de manier waarop de oplossingsroute wordt gepresenteerd. Hoewel veel puzzels onder diverse namen rondgaan, volgt hier toch een opsomming van de hoofdstuktitels, zodat een ieder kan bepalen of het de moeite waard is het boekje aan te schaffen.

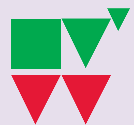
1. *Opeenvolgende getallen.*
2. *Een onverwacht proefwerk.* Dit probleem is ook wel bekend als het *Hangman Problem.*
3. *Modderige kinderen.* Ik ken dit als het verhaal van kaboutertjes met gekleurde mutsjes. Leuk om met een klas te doen!
4. *Monty Hall.* In Nederland wordt dit vaak het Driedeurenprobleem genoemd.
5. *Russische kaarten.*
6. *Wie heeft de som?*
7. *Som en product.*
8. *Het twee-enveloppenprobleem.*
9. *Honderd gevangenen en een gloeilamp.*

Ik heb genoeglijke uren gehad naar aanleiding van dit boekje. De tekst ademt ook het plezier dat de auteurs hebben gehad bij het samenstellen van deze bundel. Ze laten ons zien dat je iets nieuws prima in een speelse context kunt leren.

Over de recensent

Harm Bakker is leraar wiskunde aan de CSG Liudger in Drachten en is verder betrokken bij de educatieve masteropleiding wiskunde van de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden.
E-mailadres: *h.bakker.marum@kpnmail.nl*

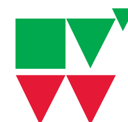
FEEST!



Het is feest, want de NVvW bestaat al 90 jaar. We hebben op de afgelopen jaarvergadering al nieuwe tasjes gebruikt met daarop de vermelding van de verjaardag, maar er moet natuurlijk ook een feestje worden gegeven. In onze nieuwsbrief heeft u al twee keer een tipje van de sluier opgelicht gekregen en in de openingsrede van Marian Kollenveld is ook al gemeld dat u 18 april 2015 een plekje moet geven in uw agenda.
We geven het feestje op 18 april in Klein Gooiland. Dat is een prachtig theater met voldoende ruimte om onze verjaardag te vieren met vele leden van de NVvW, waaronder ook natuurlijk onze ereleden. Het theater zult u beter leren kennen door de speciaal voor ons gemaakte wiskundewandeling in het theater te lopen en de bijbehorende vragen te beantwoorden.
De dag bestaat verder uit vier bijeenkomsten in de theaterzaal; twee lezingen, een quiz en de uitreiking van het Animath filmfestival. Daarover is in de Nieuwsbrief reeds tweemaal geschreven en op de jaardag was de gelegenheid een workshop te volgen. De animatiefilmpjes worden gemaakt door leerlingen uit vo en (v)mbo, en studenten van de lerarenopleidingen. Meer informatie over deze Animath-filmwedstrijd vindt u op de site *http://animath.scriptfactory.nl/animath/*. Meld uw leerlingen aan voor 31 januari om mee te kunnen doen.
Naast de wandeling en de presentaties in het theater is er natuurlijk ook tijd om met elkaar te praten en te eten en te drinken. Voor lunch en diner wordt gezorgd, dus u hoeft geen broodjes mee te nemen.
Na afloop van het feest krijgt u het lustrumboek als cadeautje mee: een boek met interviews met tien (oud)-wiskundeleraren die de afgelopen zestig jaar een prominente rol in ons wiskundeonderwijs hebben gespeeld.

JAARREDE 2014

Marian Kollenveld





Welkom

Dames en heren, hartelijk welkom, fijn dat u er weer bent. En ook nog met zovelen, we hebben alweer een recordopkomst dit jaar. Ik kan daarbij als hypothese hebben dat u voor mij komt omdat het mijn laatste keer is, maar ik wil ook wel als alternatieve hypothese ruimte geven voor de mogelijkheid dat u misschien met zoveel bent omdat u een verstandige professional bent die graag op de hoogte wil zijn van de nieuwe ontwikkelingen met bijvoorbeeld de nieuwe programma's, en waar kan dat beter dan hier, bij uw bloedeigen vereniging? Maar ach, het is zaterdag, dus wie wil er nu hypotheses toetsen en verwerpen als je ook beide naast elkaar kunt laten bestaan?

Dus welkom, ook voor de nieuwe leden; dat waren er dit jaar weer aardig wat, veel meer dan het aantal vertrekkende, waardoor we een aangename groei van het ledental kunnen melden van ruim 200, waarvan er 77 hiernaartoe zijn gekomen; even kijken of ze ook al zo vroeg aanwezig zijn? Mooi, dat valt niet tegen. Daar gaan we straks lekker mee lunchen met een feestelijk bubbeltje, en we hopen dat zij lang lid zullen blijven en actief worden in de toekomst.

De toekomst

Want ja, die toekomst, we staan op de drempel van een generatiewissel, in de maatschappij met het vertrek van de babyboomers, en in het bestuur net zo goed. De secretaris en ik stoppen ermee per vandaag, je moet stoppen op je hoogtepunt nietwaar. Toen ik op school afscheid nam, was dat wel duidelijk: uit mijn laatste examenklas van 16 personen, gingen er maar liefst twee wiskunde studeren, dat is mooi 12.5%. Beter kon het niet worden, dacht ik. Maar kijk nu toch eens: jullie hebben allemaal wiskunde gestudeerd!

Dus lijkt het me helder: we hebben nu zo'n 500 man binnen, bijna 3000 leden: daar moeten toch minstens een dozijn potentiële voorzitters en bestuursleden tussen zitten. En die zijn hard nodig, dus pak je verantwoordelijkheid; de vereniging loopt weliswaar nu als een tierelier, maar dat gaat niet vanzelf en dat blijft zeker niet vanzelf gaan. Ik doe wel vrolijk, maar meen het serieus, er moeten gewoon nieuwe mensen komen die de zaak verder op de schouders willen nemen. Een vereniging wordt gemaakt door de leden, die moeten het uiteindelijk doen.

Er zijn de afgelopen tijd gesprekken gevoerd over mijn opvolging, maar dat heeft helaas nog geen resultaat gehad. Ik betreur dat; al hebben sommigen van jullie nooit anders meegemaakt, het criterium is echt niet anderhalve meter hoog en rossig krulhaar.

Wat dan wel?

Het is allemaal niet zo ingewikkeld en bijzonder, voorzitter zijn. Je moet een beetje sociaal zijn, dus niet iemand die steeds op onverklaarbare wijze in conflicten verzeild raakt. Een bepaalde overtuiging hebben, doorzettingsvermogen en geduld. Dat laatste heb ik moeten leren, maar dat kan: ging ik vroeger stampvoeten als ik mijn zin niet kreeg, tegenwoordig glimlach ik vriendelijk en zet ik het onderwerp een volgende keer weer op de agenda. Uiteindelijk leer je gaandeweg, ik weet nu meer dan toen ik begon, en kijk naar voorbeelden als Agnes Kant en Jolande Sap: je kunt volstrekt voorbereid en op de hoogte zijn en het dan toch niet redden. Alleen kennis is het niet, kijk daar dus niet teveel tegenop, op een gegeven moment moet iemand het gewoon gaan doen, voorzitter zijn, en dan groei je erin als het goed is. Ja, of niet.

En daarbij ben je dan nooit alleen: we hebben een forse professionaliseringsslag gemaakt: er is een dagelijks bestuur en een algemeen bestuur waarbinnen de taken verdeeld zijn en mensen hun eigen portefeuille beheren. Met een beleidsmedewerker voor administratie en ter ondersteuning van het

bestuur. Er is een redactie van het blad, de website, mensen in werkgroepen die allemaal redelijk zelfsturend zijn. De centrale functies worden middels detachering in elk geval deels betaald, het blijft altijd ook een beetje hobby natuurlijk. Het voorzitterschap is in die zin net als lesgeven: zorg ervoor dat iedereen vooral lekker zelf bezig is met de goede dingen en richt je aandacht op de lange lijnen.
Als mooi, maar willekeurig voorbeeld van die zelfsturing: webmaster Erik, die zich een slag in de rondte heeft gewerkt om ervoor te zorgen dat vanaf vandaag de laatste acht jaargangen van *Euclides* op de site te vinden zijn. Dat scheelt plankruimte in uw boekenkast en is prettig voor lerarenopleiders en studenten. Dank je wel, Erik.
Of onze beleidsmedewerkster Heleen, die inmiddels zo'n 80 scholen heeft bezocht om voorlichting te geven over de nieuwe programma's, en de vereniging en passant weet te promoten. Dank je wel, Heleen.

Mijn bijdrage daarin? Een goed idee positief waarderen en zonodig regelen dat het kan gebeuren. Ik stop nu even met de werving: ik hoop duidelijk gemaakt te hebben dat er echt nu dringend een voorzitter nodig is, en volgend jaar een aantal bestuursleden, maar dat het ook leuk, interessant en volstrekt te doen is. Toen ik begon had ik ook geen echt idee waar ik aan begon, maar op een gegeven moment moet je het gewoon maar doen, ik zei het al. Dat is mij althans uitstekend bevallen, maar dat had u vast al begrepen. Dus kom op, pak uw verantwoordelijkheid, wordt actief, meldt u aan als potentieel bestuurslid! We hebben u nodig.

Nog meer afscheid

We nemen vandaag ook weer wat meer afscheid van Elly en Pim. In de loop van het jaar is ook de financiële administratie verhuisd naar onze beleidsmedewerkster Heleen van der Ree, die diep van binnen nogal *nerdy* is en heel modern vastgeplakt zit aan een scherm, dus ook digitaal gaat het helemaal goed met ons. Hun werk voor de leden en financiële administratie is nu definitief afgerond, maar ze blijven nog wel in het winkeltje al die leuke spulletjes verkopen. U kunt bij hen even langs voor een beetje afscheid, maar ze zijn nog steeds niet helemaal weg, het is nog veel te gezellig hier.

En ook onze webmaster annex forummoderator Erik Korthof heeft de eindfase van het afscheid bereikt. Omdat hij zich altijd zo stevig weerde op het forum had ik hem een jaar of vijf geleden gevraagd om dit ook wat in een meer officiële hoedanigheid te doen en ik heb daar bepaald geen spijt van gehad. De zaken waren bij hem in goede handen, hij had er echt plezier in en voelde zich ook verantwoordelijk. Met de komst van de nieuwe website is Erik al gestopt als webmaster en nu dus ook als moderator van het forum. Het zal hem lastig vallen, vermoed ik, als moderator van het examenforum kon hij het soms al niet laten om als Erik zijn hart te luchten waar hij als moderator uiteraard wijsheid en rust uitstraalde. Erik, we danken je heel hartelijk voor je jarenlange grote inzet en we hebben in de stand een hopelijk passend cadeautje voor je. En geen grapjes over pensioen.

> 'DUS KOM OP, PAK UW VERANTWOORDELIJKHEID, WORDT ACTIEF, MELDT U AAN ALS POTENTIEEL BESTUURSLID!'

En er is een aangekondigd afscheid van Marjanne de Nijs, de hoofdredacteur van *Euclides* die heeft aangegeven aan het eind van de cursus daarmee te willen stoppen. Dat is jammer want we waren - en zijn nog even - blij met haar, ze heeft het proces van de *restyling* van *Euclides* mede in goede banen geleid, het blad is mooi eigentijds, relevant en goed leesbaar. Maar ze loopt duidelijk niet weg halverwege een klus en dus gaan we welgemoed op zoek naar een opvolger. Suggesties en aanmeldingen welkom!

Toen en nu

Ik heb er de jaarrede van 1999 nog maar op nageslagen, mijn eerste, en dan valt op dat de thema's eigenlijk niet veranderd zijn. Niet zo gek natuurlijk, want het ligt wel zo'n beetje vast in de statuten, maar je ziet dat we wel hier en daar wat voortgang hebben gemaakt. En dat is toch wel aardig, anders had ik het u niet gemeld natuurlijk...



De missie toen; citaat: 'Het bestuur vindt het belangrijk om de stem van de vereniging en daarmee die van de leraar voor de klas te laten klinken overal waar dat nuttig is voor het behartigen van de leden en het bevorderen van de kwaliteit van het wiskundeonderwijs. Dat betekent enerzijds tijdig reageren op ontwikkelingen maar anderzijds ook anticiperend eigen initiatieven nemen. De eigen stem, het eigen standpunt staat daarbij steeds voorop.'
Dat is onveranderd, in het huidige visiestuk is dat kernachtig verwoord in: samen maken we het wiskundeonderwijs.

Relaties

In 1999 waren we aangesloten bij het Platform Vakinhoudelijke Verenigingen, omdat je als leraar een vak geeft. Daar is sindsdien bijgekomen

- de Onderwijscoöperatie omdat je als leraar een beroep hebt, In de coöperatie wordt gesproken over kwaliteit en professionaliteit van de leraar en nemen we deel aan het register;
- de Federatie Onderwijsbonden omdat je als leraar werknemer bent met een cao en rechtspositie. Vandaar dat u de contributie van de belasting kunt aftrekken, en u rechtspositionele hulp kunt krijgen;
- het IOBT, dat zijn de collega's van natuurkunde, scheikunde en biologie, vanwege de min of meer gelijktijdige vernieuwing van de bètavakken;
- het Platform Wiskunde Nederland, dat we samen met het KWG hebben opgezet om de belangen van de wiskunde in den brede te behartigen. De NVvW zit in het bestuur van het PWN, en is aanwezig in de commissies Onderwijs en Publicaties.

> 'EN WE HOPEN DAT U DAT LEKKER GAAT UITGEVEN AAN VAKINHOUDELIJKE CURSUSSEN'

Als leraar heb je ook te maken met de schoolleiding, maar de ervaringen met de vo-raad, de vereniging van schoolleiders, zijn gemengd: we hebben meegedaan met een pilotproject rond de open leermiddelenbank vo-content, waarbij de Wageningse methode en een deel van math4all is opgenomen in hun stercollectie. In de loop van de jaren is het gesprek gevoerd over een aantal thema's, zoals:

- rekenen, toen het geld nog beleidsloos aan scholen werd gegeven en ze nog geen idee hadden wat hen te wachten stond. Het is mooi dat zij inmiddels wakker zijn geworden en ook vinden dat je niet moet toetsen met ernstige gevolgen voor het diploma zonder dat het voorafgaand onderwijs op orde is;
- de aansluiting mavo-havo vanwege de vernieuwde onderbouw en de tussentoets toen hij nog niet diagnostisch was;
- en als rode draad: contacttijd voor wiskunde.

Het nuttig effect is beperkt omdat de vo-raad geen eigen mandaat heeft; zij zijn niet de baas, dus moet je toch altijd naar de scholen toe, en dat zijn er veel, of naar het beleid, en de politiek.

En dat doen we dus ook

Het tegenhouden van havo wiskunde C ging vooral via OCW, net als de tegemoetkoming dat wiskunde kernvak werd, in de hoop op meer contacttijd, voor het diagnostisch maken van de tussentoets was steun van onderwijswoordvoerders in de Tweede Kamer nuttig. En het rekenen en de toets gaat nu gelukkig de goede kant op vanwege de inspanning van veel mensen.

Vorig jaar stonden we hier nog vóór de hoorzitting over rekenen in de Tweede Kamer, waaruit de commissie Bosker voortkwam die alles nog eens grondig tegen het licht heeft gehouden. Ik was wel tevreden met het resultaat. In de nieuwsbrief schreef ik daarover dat we in die commissie twee leden hadden, ik bedoelde natuurlijk twee leraren door ons voorgedragen, want de commissie telde nog meer leden van de vereniging, zoals de professoren Van Streun en Van de Craats, die ik hier met ere wil noemen.
Dat is een les die ik zeker geleerd heb: je komt pas ergens als je standpunt gedeeld wordt, als je

niet als enige iets roept of vindt, hoe verstandig of vanzelfsprekend ook in eigen ogen. Daar ligt het belang van het onderhouden van goede relaties met alle betrokkenen.

In 1999 was net op elke school de tweede fase ingevoerd, en tobden we nog met de basisvorming. Inmiddels zijn we weer enkele veranderingen verder, onder wisselend politiek gesternte: Na de opstand tegen de reducties van de bètavakken onder minister Maria van der Hoeven en de *toetshype* onder Marja van Bijsterveld zitten we nu in rustiger vaarwater: bij cTWO waren leraren vanaf het begin bij alle commissies betrokken, en in de implementatiefase wordt prima samengewerkt met SLO en CvTE.

Beleidswind

En de beleidswind waait inmiddels zo warm in onze nek, heeft u de voortgangsrapportage van de leraren agenda gelezen? Doen, als u eens moe thuiskomt, je kikkert er echt van op.
Het begint al met de constatering: de leraar maakt het verschil. Dat lezen we graag. En dan volgt er een hele trits ambities voor het hele traject: van student, die moet beter, via lerarenopleidingen, die moeten beter, van starter, die moet beter begeleid tot zittend leraar, die zich moet blijven ontwikkelen.
Het deed me ook wel goed te lezen dat men nu een probleem zag als de groep van 55-65, waarin de meeste eerstegraders en academici zitten, met pensioen gaat. Een aantal jaren terug werd die groep beleidsmatig nog weggezet als de 'grijze prop'. Als die weg waren, kon het pas lekker doorstromen, met al die coaches en begeleiders van het leerproces die zelf niet zoveel hoefden te weten van het vak dat ze begeleidden. En die je dus ook geen LD-functie hoefde aanbieden, maar wel voor veel vakken kon inzetten.
Die dwaling is voorbij, maar als je de ambities uit het begin van het stuk vergelijkt met de werkelijkheid verderop zie je wel een aantal erg hoopvolle grafiekjes van het soort: we willen naar niveau 10, we zitten nu op 2,3 het afgelopen jaar was 2 en dan een stippellijn met stevige trendbreuk.
Alle leraren bekwaam en bevoegd, een sterke beroepsgroep, het belang van permanente professionele ontwikkeling... alles wat wij al jaren zeggen, inderdaad ook al in 1999.
Maar zoals gezegd, dat kan pas als het idee breder is geland en daarvoor moesten eerst veel mensen afreizen naar Finland, of zo. Dus ja, het is hard nodig wat er nu allemaal op stapel staat, maar het had natuurlijk al veel eerder ter hand genomen moeten worden en het wordt nog een hele toer om het allemaal te realiseren. Hopelijk blijft het beleid nog even consistent.

Geland

Het idee dat je bij de leraar moet zijn voor goed onderwijs is nu wel geland en daar profiteren we mooi van. Tot mijn grote genoegen, en ook een beetje trots, kan ik meedelen dat het gelukt is om in de laatste maand van mijn voorzitterschap een pilotproject gesubsidieerd te krijgen rond het opzetten van een goed systeem van vakinhoudelijke nascholing. De pilot is voor wiskunde en de bedoeling is dan dat andere vakken daar vervolgens hun voordeel mee kunnen doen.
Het gaat om het opzetten van een permanent en landelijk aanbod van goede cursussen. Ik had het daar vorig jaar al over in de jaarrede, maar het duurde nog negen maanden voor op OCW echt iedereen was overtuigd dat dat aanbod er nu niet zo was, het leek zo vanzelfsprekend.
Er gaat namelijk best al veel geld voor scholing en kwaliteitsverbetering naar scholen, maar wel altijd via de lumpsum en dat verklaart wel dat van de kwaliteitsgelden van vorig jaar zo moeilijk te achterhalen bleek waarvoor ze waren ingezet en ook het scholingsbudget zelden volledig wordt uitgegeven (en dat is een *understatement*). Een stap in de goede richting is dat de leraar (u dus) zelf meer baas wordt over het hem toekomende nascholingsgeld. En we hopen dat u dat lekker gaat uitgeven aan vakinhoudelijke cursussen.

Het gaat in eerste instantie over de komende vernieuwing met de cTWO-programma's. We willen praktische cursussen, waar u vakinhoudelijk zodanig boven de leerstof komt te staan dat het in de klas soepel gaat, met ook aandacht voor de didactiek en toetsen. Daarmee helpen we iedereen die nu en in de toekomst in de bovenbouw lessen moet verzorgen, dus het zou mooi zijn als het lukt.
Het is volgens mij voor het eerst dat iets dergelijks komt van een vakvereniging, dus van de leraren zelf. OCW vindt het ook wat onwennig en vraagt een uitvoerig uitgewerkt projectplan voor ze de





belastingeuro's daadwerkelijk overmaken. Dat is bij die kwaliteitsgelden vast niet gebeurd, maar het is niet meer dan terecht en dus maken we dat. We zijn toch alvast maar begonnen met concrete plannen: omdat het belangrijk is dat de cursussen aansluiten bij de programma's enerzijds en de voorkennis van docenten anderzijds en ook nog zo praktisch zijn dat je er in de les wat aan hebt, zoeken we docenten die hierbij betrokken willen zijn in een nog te vormen klankbordgroep. Voelt u daar wat voor? Meldt u dan aan bij de stand van de NVvW (red: e-mail: *hoofdbureau@nvvw.nl*).

Geland(2)

Ook geland is de oproep van vorig jaar vanwege de ontbrekende hoogleraren vakdidactiek wiskunde aan universiteiten als centrale, inspirerende figuren binnen de ontwikkeling en het onderzoek. Meer kennis uit onderzoek kan ons in discussies ook wellicht verder brengen dan het simpelweg uitwisselen van standpunten voor of tegen iets, (contexten, grafische rekenmachine) waar het nu vaak blijft hangen.
De universiteit Utrecht heeft een deeltijd hoogleraar, de Technische Universiteit Eindhoven zelfs een voltijds aangesteld. Ik hoop dat deze goede voorbeelden navolging krijgen aan meerdere universiteiten.

Over alles

Het is in een jaarrede niet mogelijk om volledig te zijn, daarvoor gebeurt er teveel; ik heb nog veel niet gezegd. Maar we houden u graag op de hoogte. U vindt daarom in het programmaboekje weer een overzichtje met activiteiten, er zijn de jaarverslagen, er is *Euclides* met het verenigingsnieuws, er is de digitale nieuwsbrief die goed gelezen wordt: en er is de website, waar elke werkgroep zijn eigen pagina's heeft gekregen.
Daar ziet u o.a. dat de werkgroep hbo onverminderd actief bezig is met het verspreiden van hun strategische nota over de aansluiting op het hbo, vanuit mbo en vo, dat de kennisbasis wiskunde voor techniek af is en dat er gewerkt wordt aan kennisbasis wiskunde voor economie. In het najaar 2015 organiseren ze een conferentie over de vraag, welke wiskunde een hbo'er nu nodig heeft om ICT-rekentools in het technisch en economisch beroepenveld verstandig te kunnen gebruiken. In het najaar van 2016 organiseren ze samen met de SLO een voorlichting over het nieuwe wiskundeprogramma voor het hbo. Dat lijkt laat, maar is mooi op tijd. Als u mee wilt denken met de werkgroep, bent u van harte welkom.

De werkgroep havo/vwo is bezig met de didactiek en schrijft daarover een stukje in *Euclides*, en adviseerde het bestuur over rekenen, de historische werkgroep heeft eigen flyers, een eigen jaarlijkse bijeenkomst en doet enthousiast mee met de voorbereiding van het jubileum. Het Wereldwiskundefonds heeft via de contributie van u veel geld opgehaald en de boekenveiling loopt nog. Zij zijn altijd geïnteresseerd in suggesties voor een nuttige besteding van het geld. De werkgroep vmbo spoorde het bestuur wederom aan om te pleiten voor een herziening van de examenprogramma's. We hebben hierover de eerste gesprekken gevoerd en daar gaat het bestuur mee door.
Korter kan ik het niet zeggen: gaat u vooral zelf kijken, meldt u aan en doe mee.

Dank!

Er is het afgelopen jaar weer veel werk verzet door veel mensen, vanuit een grote betrokkenheid bij de vereniging, die ons verheugt en ook dankbaar stemt. En dan heb ik nog niet eens genoemd dat we in het voorjaar ons grote lustrumfeest hebben, waar ook veel tijd en creativiteit in wordt gestoken. We kunnen er niet omheen: U merkt dat de vereniging ondanks haar 90 jaren nog steeds midden in het wiskundeleven staat. Het bestuur zal zich blijven inzetten voor het waarborgen en versterken van de positie van het vak wiskunde en de wiskundeleraar in het onderwijs, om het werk voor de wiskundeleraar werkbaar te maken en te houden.
Een bestuur kan al die ontwikkelingen en activiteiten nooit alleen aan. We zijn trots op al die mensen in de vereniging die zich voor de goede zaak willen inzetten. We hebben elkaar nodig, samen staan we sterker. Ik wil dus graag besluiten met alle vrijwilligers hartelijk te danken voor hun inzet. En ik wens u en ons een goede toekomst met veel mooi wiskunde onderwijs.
En had ik het al gezegd? Doe mee, wordt actief, we hebben ook u hard nodig!
Dank u wel

PUZZEL 90-3

HO-HO-HO, STOP BIJ EEN STERRETJE

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

De Kerstman en Rudolph, het intelligente rendier met de rode neus, hebben dit jaar een eigenaardige manier bedacht om het pakpapier te verdelen. Op tafel ligt een groot stuk kerstpapier. Rudolph zet daar met die lichtgevende rode neus een aantal (n) rode sterretjes op. Die sterretjes kunnen ergens middenop het papier staan, aan de rand of in de hoeken. Vervolgens mag de Kerstman nog één rood sterretje tekenen, en wel in de hoek van het papier linksonder. Na dat gebeuren mag de Kerstman, zonder het papier te draaien er $n + 1$ rechthoekige stukken uit knippen. Daarbij moet elk stuk een van de $n + 1$ rode sterretjes hebben in de uiterste linkeronderhoek van het geknipte stuk papier.
De Kerstman doet z'n best om in totaal een zo groot mogelijk oppervlak papier te knippen, want hij wil graag veel cadeautjes inpakken. Rudolph mag het resterende deel gebruiken om cadeautjes in te pakken en zal het de Kerstman zo moeilijk mogelijk maken. Het zal blijken dat de Kerstman die slimme Rudolph toch te slim af is en zo meer papier ter beschikking zal hebben dan Rudolph, ook al maakt die het z'n baasje zo lastig mogelijk. We veronderstellen dat de sterretjes zo klein zijn dat we hun afmetingen op 0 kunnen stellen. Omdat het voor de opgaven niet uitmaakt of het papier rechthoekig of vierkant is, gaan we uit van een vierkant stuk pakpapier dat in rechthoekige stukken wordt geknipt.
Het is niet moeilijk na te gaan dat als Rudolph slechts 1 sterretje mag zetten, hij dat het beste kan doen precies in het midden. De Kerstman kan zich dan driekwart van het hele vel toe-eigenen.


figuur 1

Opgave 1 – Als we de rode sterretjes van Rudolph in figuur 1 coördinaten geven, dan is dat: (3,5), (5,2) en (8,7), op een papier van 10 bij 10. Bepaal nu de beste strategie voor de Kerstman, en de bijbehorende percentages papier die ze dan elk krijgen.

Rudolph kan het beter doen dan in opgave 1:
Opgave 2* – Rudolph mag twee sterretjes zetten. Waar moet hij ze zetten om te zorgen dat hij zoveel mogelijk papier krijgt, en hoeveel procent van het papier krijgen ze dan elk als de Kerstman de beste strategie volgt? Dezelfde vraag als Rudolph drie sterretjes mag zetten.
Voor opgaven 3 en 4 geldt: Nadat Rudolph de sterretjes heeft gezet, mag de Kerstman het papier op de kniptafel draaien zodat een ander hoekpunt linksonder komt te liggen. Eenmaal neergelegd mag hij het niet meer verdraaien. Hij zet dan zijn sterretje weer linksonder.

Opgave 3 – Rudolph zet drie sterretjes, weer zoals in opgave 1, zie figuur 1. Bepaal de beste strategie voor de Kerstman om te draaien en te knippen, en de bijbehorende percentages papier die ze dan elk krijgen.

Opgave 4* – Dezelfde vraag als opgave 2 als de Kerstman mag draaien en Rudolph twee sterretjes mag zetten.
*Voor opgaven 2 en 4 geldt:
We vermoeden dat Rudolph zijn sterretjes het beste symmetrisch op een diagonaal van het papier kan zetten, maar wij kennen daarvoor geen algemeen bewijs. Een uitdaging voor u? De inzender met de beste strategie voor Rudolph en de Kerstman krijgt het maximale aantal punten voor die vragen. Voor iets minder goede strategieën krijgt u ook punten, maar minder.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar liekewobien@hotmail.nl of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. Uw oplossing moet uiterlijk 5 januari 2015 binnen zijn. Wij wensen u veel plezier en een mooie kerst.

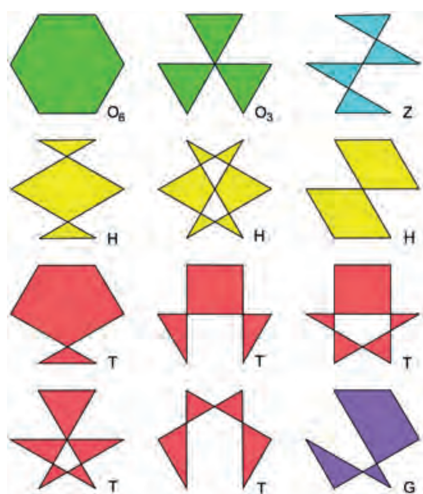
UITWERKING PUZZEL 90-1

HET SCHILDERIJTJE VAN FRITS GÖBEL

Wobien Doyer
Lieke de Rooij

Deze puzzel was gebaseerd op een idee en bijbehorend 'schilderijtje' van Frits Göbel, waarvoor hij extra punten heeft verdiend voor de ladder. Hij tekende alle *n*-hoeken waarvan de hoekpunten op die van een regelmatige *n*-hoek liggen met $n = 7$. De mogelijke symmetrie van de figuren geven we aan met hoofdletters met overeenkomstige symmetrie: O, H, S, T of G (geen).

In **opgave 1** vroegen wij om zo alle zeshoeken te bepalen. Dat zijn er 12, 1 keer O_6, 1 keer O_3, 1 keer S, 3 keer H, 5 keer T en 1 keer G, zie figuur 1.



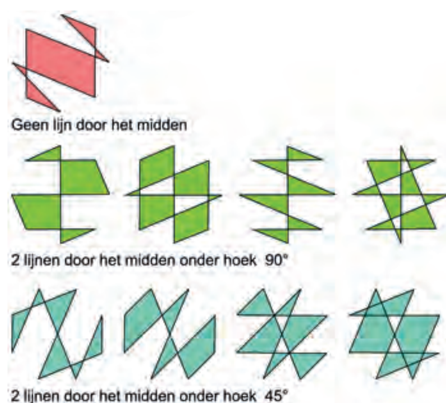
figuur 1

In **opgave 2** werd gevraagd naar het aantal T-symmetrische *n*-hoeken voor $n = 7$ (kon je tellen in het schilderijtje), $n = 11$ en algemeen n = priem. Dan blijkt dat bij oneven *n* er geen H- of S-symmetrische figuren zijn. Om het aantal te bepalen, kunnen we de hoekpunten tekenen van een regelmatige *n*-hoek ($n = 2q + 1$), met een punt P. We construeren een T-symmetrisch figuur met symmetrieas door P. Vanuit P tekenen we twee gelijke zijden. Daarvoor zijn *q* mogelijkheden. Voor een volgend paar zijden zijn er $2 \cdot (q - 1)$ mogelijkheden. Vervolgens $2 \cdot (q - 2)$, $2 \cdot (q - 3)$ ... Totaal dus $q! \cdot 2^{q-1}$ mogelijkheden. Voor $n = 7$ zijn dat er 24 en 1920 voor $n = 11$. Dit is echter inclusief O-symmetrische figuren. Met *n* priem zijn dat er $\frac{1}{2}(n - 1) = q$. Totaal dus: 21 voor $n = 7$ en 1915 voor $n = 11$. De algemene formule voor *n* priem met $n = 2q + 1$ is dus $q! \cdot 2^{q-1} - q$.

Voor **opgave 3** moesten alle S-symmetrische figuren met $n = 8$ worden bepaald. Dat zijn er negen. Merk op dat het aantal lijnen door het midden even is: Van elke lijn niet door het midden moet het puntspiegelbeeld ook voorkomen, zodat er een even aantal overblijft voor lijnen wel door het midden. Dat geeft een mogelijkheid het probleem systematisch aan te pakken: Voor figuren zonder lijnen door het midden is er slechts een S-figuur. Met twee lijnen door het midden (kan op twee manieren) zijn er $2 \cdot 4 = 8$ S-figuren en met vier lijnen door het midden geen. Zie figuur 2.

Bij **opgave 4** moest worden onderzocht of Frits Göbel inderdaad alle mogelijke figuren heeft getekend met $n = 7$, waarbij werd getipt om te letten op de mogelijke symmetrieën. We kunnen tellen dat er 39 figuren zijn, waarvan 21 met T-symmetrie en 3 met O_7-symmetrie, overeenkomstig het antwoord op opgave 2, dus dat klopt.
Bekijken we rijtjes met de nummers van de achtereenvolgende hoekpunten, dan zijn er 7! rijtjes, maar omdat rotatie en spiegeling gelijke figuren opleveren, blijven er $7!/14 = 360$ rijtjes over.

De O-symmetrische figuren geven elk slechts 1 rijtje, de T-symmetrische geven er elk 7 en de G-'symmetrische' elk 14. Dus moet gelden: O + 7T + 14G =360, waarbij O = 3, T = 21 en O + T + G = 39. Dan volgt dat G = 15. En inderdaad: 3 + 7·21 + 14·15 = 360. Zoals meerdere inzenders opmerkten: Geen verrassing dat Frits z'n schilderijtje volledig is. Analoog was ook uw antwoord op opgave 1 te controleren: $1 \cdot O_6 + 2 \cdot O_3 + 3 \cdot S + 4 \cdot H + 6 \cdot T + 12 \cdot G = 6!/12$ en dat klopt.



figuur 2

Enkelen kregen het voor elkaar om te bepalen hoeveel van elke symmetrie er zijn voor $n = 8$ of meer, door programmeren (G. Riphagen en H. Bakker) of 'met de hand' (G. Bouwhuis).
Ter controle gebruikten wij informatie uit een op internet te vinden artikel[1] waarin formules worden gegeven voor het totale aantal verschillende figuren voor n. Dit werd ook vermeld door twee inzenders.

Noot

[1] Golomb. S. W., & Welch, L. R. (1960). On the enumeration of polygons. *The American Mathematical Monthly*, *67*(4). Te vinden op *www.jstor.org*

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na 90-1 is:

H. Bakker	192
G. Riphagen	162
R. Stolwijk	151
L. Pos	149
J. Remijn	144
H. Linders	129
J. Verbakel	110
J. Guichelaar	106
K. van der Straaten	92
F. Göbel	68

De ladderprijs is gewonnen door Harm Bakker. Hartelijk gefeliciteerd daarmee!

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Annelien Jonkman
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

Inzenden bijdragen
Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Marian Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04 E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Lagerwaard, Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46 E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 50,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. t.a.v. F. van Dop
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2015

za 10/1
UTRECHT
Wintersymposium KWG: Dataverwerking en statistiek
Organisatie KWG

19/1 t/m 29/1
LANDELIJK
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

do/vr 22/1 23/1
VELDHOVEN
Panama conferentie
Organisatie Panama

vr/za 30/1 31/1
NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskundedagen
Organisatie Freudenthal Instituut

wo 11/2
OP DE SCHOLEN
Onderbouw WiskundeDag,
Organisatie FIsme

vr 13/03
LANDELIJK
Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

do 19/03
OP DE SCHOLEN
W4 Kangoeroewedstrijd
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

wo 25/03
OP DE SCHOLEN
Grote Rekendag,
Organisatie FIsme

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html

JAARGANG 90

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
4	5 februari 2015	4 december 2014
5	24 maart 2015	19 januari 2015
6	13 mei 2015	16 maart 2015
7	30 juni 2015	18 mei 2015